Test di prova VIII*

Nicola Arcozzi

November 24, 2006

Analisi Matematica L-A

(1)[7 pti.] Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \log\left(|\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x)|\right).$$

(a) Determinare il dominio A di f e il dominio B di f'.[1]
(b) Determinare gli intervalli su cui f é crescente.
(c) Determinare gli intervalli su cui f é concava.
(d) Il dominio di f, B, é unione di intervalli disgiunti (cioé, aventi intersezione vuota). Calcolare

$$\lim_{x\to x_0} f(x),$$

per ciascun x_0 che sia estremo di un intervallo in B.
(d) Disegnare un grafico di f che tenga conto delle informazioni raccolte.

(2)[3 pti.] Calcolare

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{[e^{2-x^2} - e^2(1-x^2)]}{x^3 \sin(3x)}.$$

(i) $L = 0$.

(ii) $L = +\infty$.

(iii) $L = \frac{e^2}{6}$.

(iv) $L = 1$.

(3) [3 pti.] Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = f(2) = 0$ e $\int_0^2 f(t)dt = 2\pi$. Quale delle seguenti affermazioni segue da queste ipotesi?

(i) Esiste $x \in [0, 2]$ t.c. $f(x) = \pi$.

*Il punteggio attribuito ai singoli esercizi é solo indicativo

[1] Vi sará forse d'aiuto sapere che $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$.

(ii) Esiste $x \in [0,2]$: $f'(x) = 0$.

(iii) $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \pi$.

(iv) La funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ é derivabile in $[0,2]$ ed esiste $x \in (0,2)$: $F'(x) = 0$.

(4) [2 pti.] Mostrare che per ogni $a, b \geq 0$,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}.$$