Test di prova IX*

Nicola Arcozzi

November 29, 2006

Analisi Matematica L-A
Esercizi per la preparazione della prova scritta complessiva.

Cognome e nome (in stampatello):

Giorno in cui si preferisce svolgere la prova orale:

(1)[3pt] Calcolare

$$L = \lim_{x \to 3^+} e^{x-3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9}$$

(i) $L = 0$

(ii) $L = +\infty$

(iii) $L = -\frac{2}{3}$

(iv) $L = -\infty$

(2)[3pt] Calcolare

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{3 \cdot 3^{2n} + 5 \cdot n^3}{7 \cdot 9^n + 11 \cdot n^3}$$

(i) $L = 0$

(ii) $L = +\infty$

(iii) $L = \frac{3}{7}$

(iv) $L = \frac{5}{11}$

*I punteggi degli esercizi sono solo indicativi.

(3)[3pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$h(x) = f(x \cdot f(x)).$$

Supponiamo che $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = e$ e $f'(0) = \pi$. Calcolare $h'(1)$.

(i) $h'(1) = 5\pi$.

(ii) $h'(1) = 5e$.

(iii) $h'(1) = 2e$.

(iv) $h'(1) = 15$.

(4) [3pt] Siano $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[0, 1]$ e si supponga che $f(0) = 1$, $g(0) = 2$, $f(1) = 1$, $g(1) = 1$. Sia inoltre $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita come

$$h(x) = 4 \cdot f(x) - g(x).$$

Dalle ipotesi segue che

(i) $\exists x \in [0, 1] : \ h(x) = 0$.

(ii) h é crescente su $[0, 1]$.

(iii) $\exists x \in [0, 1] : \ h(x) = 5$.

(iv) non esiste alcun $x \in [0, 1]$ tale per cui $h(x) = 0$.

(5)[3pt] Sia $f : [0, 2] - \{1\} \to \mathbb{R}$ una funzione. Quale delle seguenti proprietá esprime il fatto che

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2?$$

(i) $\forall \{a_n\}$ in $[0, 2] - \{1\}$ e $\forall \epsilon > 0$ si ha che $|f(a_n) - 2| < \epsilon$ definitivamente.

(ii) $\forall \{a_n\}$ in $[0, 2] - \{1\}$ e $\forall \epsilon > 0$ si ha che, se $a_n \to 2$ per $n \to \infty$, allora $|f(a_n) - 1| < \epsilon$ definitivamente.

(iii) $\forall \{a_n\}$ in $[0, 2] - \{1\}$ e $\forall \epsilon > 0$ si ha che, se $a_n \to 1$ per $n \to \infty$, allora $|f(a_n) - 2| < \epsilon$ definitivamente.

(iv) $\forall \epsilon > 0$, $|a_n - 1| < \epsilon$ definitivamente.

Esercizi per la preparazione sia della prova scritta complessiva che della seconda prova scritta parziale.

(6)[3 pti.] Calcolare

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x+1} - e(3x+1)}{(\log(1+3x)-1)\sin(2x)}.$$

(i) $L = 0$.

(ii) $L = +\infty$.

(iii) $L = \frac{3}{4}e$.

(iv) $L = \frac{1}{4}e$.

(7) [3 pti.] Calcolare il seguente integrale,

$$I = \int_0^{\pi/12} \log(\cos(3x)) \cdot \cos(3x) \cdot (\sin(3x))\ dx.$$

(i) $I = \frac{1}{8}(7 - \log 2)$.

(ii) $I = \frac{1}{8}(\log 2 - 7)$.

(iii) $I = \frac{1}{24}(7 - \log 2)$.

(iv) $I = \frac{1}{24}(\log 2 - 7)$.

(8) [3 pti.] Calcolare il seguente integrale,

$$I = \int_2^3 \frac{2x-1}{4\cdot x^2 - 1} dx.$$

(9)[6 pti.] Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = e^{3-|x^2-x|}$$

(a) Determinare gli intervalli su cui f é crescente.
(b) Determinare gli intervalli su cui f é concava.
(c) Calcolare

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x).$$

(d) Disegnare un grafico di f che tenga conto delle informazioni raccolte.

Esercizi per la preparazione della seconda prova scritta parziale.

(10) [2 pti.] Mostrare che se f é una funzione continua in $[0, 1]$, allora

$$e^{\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2} \leq \int_0^1 e^{f(t)^2} dt.$$