Test di prova IV

Nicola Arcozzi

16 febbraio 2007

Analisi Matematica L-B

(1) Trovare la soluzione massimale[1] del problema di Cauchy (scrivere tutti i passaggi e motivarli):

$$\begin{cases} y' = y^5 x, \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

(2) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y = 5e^{\sqrt{3}x}.$$

(3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione parzialmente derivabile su tutto $\mathbb{R}^2$ e sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$h(x, y) = f(xe^{x-y^2} + 2x + 2, \sin(x^2 y) + 3).$$

Calcolare $Jh(1, 0)$ sapendo che $Jf(e+4, 3) = \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 0 & 3\pi \end{pmatrix}$, $Jf(1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(4) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^2 - 2iz - 5)(z^4 + 3i) = 0.$$

(5) Trovare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (x^2 - y^2 - 1)(x^2 - 4)$$

e classificarli.

[1] Ció significa: la soluzione e il suo dominio

Soluzioni.

(1) $y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{3-2x^2}}, \ -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$.

(2) $\exists A, B \in \mathbb{R} : \ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ y(x) = Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x} + \frac{5}{2\sqrt{3}} xe^{\sqrt{3}x}$.

(3) $Jh(1,0) = \begin{pmatrix} 2\pi(e+1) & 2 \\ 0 & 3\pi \end{pmatrix}$.

(4) $z = 2+i, \ -2+i, \ z = \sqrt[4]{3}(\cos(-\pi/8+k\pi/2)+\sin(-\pi/8+k\pi/2)), \ k = 0,1,2,3$.

(5) I punti critici sono $(0,0), \ (0, \sqrt{\frac{5}{2}}), \ (0, -\sqrt{\frac{5}{2}}), \ (2, \sqrt{3}), \ (-2, \sqrt{3}), \ (2, -\sqrt{3}), \ (-2, -\sqrt{3})$.

I punti $(0, \sqrt{\frac{5}{2}}), \ (0, -\sqrt{\frac{5}{2}})$ sono di minimo relativo, tutti gli altri punti sono di sella.