Test di prova VI per Analisi Matematica L-B

Nicola Arcozzi

Solo per la preparazione della prova scritta complessiva:
(1) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y' + y = 2e^{x/2} - 3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

(2) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione parzialmente derivabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Definiamo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$h(x, y) = (f(x + y), g(x, 2y)).$$

Calcolare $Jh(0, 0)$ sapendo che $f'(0) = \sqrt{2}$, $\nabla g(0, 0) = (e, -e)$, $\nabla g(1, 2) = (\pi, -\pi)$.

(3) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^2 - 3iz - 2)(z^5 + 2) = 0.$$

(4) Trovare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = 3x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - x + 2 = 0$$

e classificarli.

Per la preparazione della prova scritta complessiva e del secondo parziale.
(5) Calcolare $I = \iint_\Omega f(x, y)dxdy$, dove $\Omega = \left\{(x, y) : \ 0 \le x \le 1, \ 4x^2 - y^2 \ge 1, \ y \ge 0\right\}$ e $f(x, y) = \frac{y}{y^2+2}$.

(6) Calcolare $I = \iint_\Omega f(x, y)dxdy$, dove $\Omega = \left\{(x, y) : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 9, \ x \le -|y|\right\}$ e $f(x, y) = \frac{xy^2}{(y^2+x^2)^{3/2}} \arctan(x^2 + y^2)$.

(7) Indicare per quali valori del parametro α è convergente l'integrale generalizzato

$$I = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x^\alpha} dx.$$

Soluzioni. (1)

$$y(x) = Ae^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{8}{3}e^{x/2} +$$
$$-\frac{24}{13}\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{12}{13}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

(2) Ci sono almeno due maniere per impostare l'esercizio.

(i) Scrivo h come composizione:

$$(x,y) \overset{\varphi}{\mapsto} (x, 2y, x+y) = (u,v,t) \overset{\psi}{\mapsto} (f(t), g(u,v)) = h(x,y).$$

Differenzio la composizione $h = \psi \circ \varphi$:

$$J\psi(u,v,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f'(t) \\ \partial_u g(u,v) & \partial_v g(u,v) & 0 \end{pmatrix}, \; J\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Jh(x,y) = J\psi(\varphi(x,y)) \circ J\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} f'(x+y) & f'(x+y) \\ \partial_u(x,2y) & 2\partial_u(x,2y) \end{pmatrix}.$$

(ii) Alternativamente, calcolo derivate parziali di composizioni. Siano $h_1(x,y) = f(x+y)$, $h_2(x,y) = g(x,2y)$. Allora,

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = f'(x+y)\cdot\frac{\partial(x+y)}{\partial x} = f'(x+y), \; \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) = \cdots = f'(x+y)$$

e, se $g = g(u,v)$ (ho bisogno di un nome per le variabili da cui dipende g!)

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x,2y)\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}(x,2y)\cdot\frac{\partial 2y}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}(x,2y);$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x,2y)\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}(x,2y)\cdot\frac{\partial 2y}{\partial y} = 2\cdot\frac{\partial g}{\partial v}(x,2y).$$

Quindi,

$$Jh(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla h_1(x,y) \\ \nabla h_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(x+y) & f'(x+y) \\ \partial_u(x,2y) & 2\partial_u(x,2y) \end{pmatrix}.$$

Adesso sostituisco $x = y = 0$.

(3) $\nabla f(x,y) = (9x^2 - 4xy + 3y^2 - 1, -2x^2 + 6xy)$. Punti critici: $(x,y) = (0, 1/\sqrt{3})$, $(0, -1/\sqrt{3})$, $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{6\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{6\sqrt{2}})$.

$$Hessf(x,y) = \begin{pmatrix} 18x - 4y & 6y - 4x \\ 6y - 4x & 6x \end{pmatrix} : \; Hessf(0, \pm 1/\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -4y & 6y \\ 6y & 0 \end{pmatrix}_{y = \pm 1/\sqrt{3}},$$

che è non definita, quindi $(0, 1/\sqrt{3})$, $(0, -1/\sqrt{3})$ sono punti di sella;

$$Hessf(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{6\sqrt{2}}) = \pm\frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 50 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Analizzando i due casi, troviamo che $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{6\sqrt{2}})$ è punto di minimo relativo e che $(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{6\sqrt{2}})$ è punto di massimo relativo.

(4) $z = i, 3i$, oppure $z = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\right)$, $k = 0, \pm1, \pm2$.

(5)

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^{1} dx \left(\int_0^{\sqrt{4x^2-1}} \frac{y}{y^2+2} dy\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \big(\log(4x^2+1) - \log(2)\big)\, dx \\ &= -\frac{\log(2)}{4} + \frac{1}{2}\left[x \cdot \log(4x^2+1)\right]_{1/2}^{1} - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{8x^2}{4x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2}\log(5) - \frac{3}{4}\log(2) - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\arctan(2)}{2}. \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 r dr \left(\int_{3/4\cdot\pi}^{5/4\cdot\pi} \frac{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^3} \arctan(r^2) d\theta\right) \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^9 \arctan(t)dt \cdot 2\int_0^{1/\sqrt{2}} s^2 ds \\ &= -\left(9\arctan(9) - \pi/4 - \frac{1}{2}\log(41)\right)\frac{1}{6\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(7) $1 < \alpha < 2$.