Test di prova VIII per Analisi Matematica L-B

Nicola Arcozzi

(1) Calcolare
$$I = \iint_\Omega f(x,y)dxdy,$$
dove
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq |x|, \ x^2 + y^2 \leq 4\}$$
e $f(x,y) = \frac{x^2}{1+x^2+y^2}$.

(2) Calcolare
$$I = \iint_\Omega f(x,y)dxdy,$$
dove
$$\Omega = \{(x,y) : \ y \geq 0, \ x^2 + (y+1)^2 \leq 2\}.$$
e $f(x,y) = \frac{2}{(y+1)^3}$.

(3) Calcolare l'integrale doppio generalizzato:
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2}{(1+(x^2+y^2))^2} dxdy.$$

(4) Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ converge la serie
$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n^a}\right)}{n^{2-3a}}$$

(5)[Facoltativo] Stabilire per quali valori del parametro $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, converge il seguente integrale generalizzato. Svolgere l'esercizio per esteso, giustificando le affermazioni fatte.
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x^a}\right)}{\sqrt{x}}.$$

Soluzioni. (1) $I = \left(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}\right)(4 - \log 5)$.
(2) $I = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.
(3) $\frac{\pi}{4}$.
(4) $a < 1$.
(5) $I(a)$ converge per $a > 1/2$.