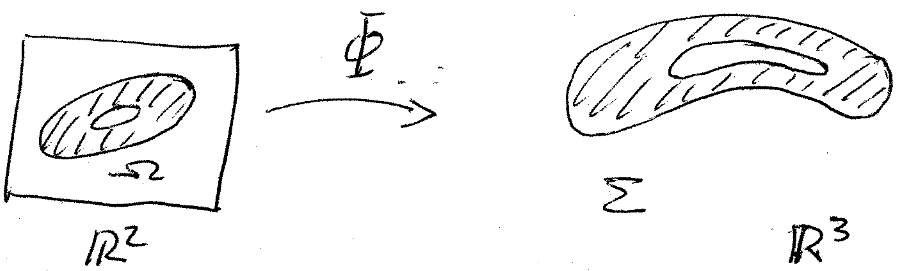
Superfici in $\mathbb{R}^3$ e integrali di superficie.

La definizione che viene data più sotto non è generale abbastanza da comprendere superfici lisce comuni nell'esperienza quotidiana come sfere o tori,

Sfera

Toro

che saranno comunque analizzabili come unioni delle superfici che andiamo a definire. Queste sono superfici parametriche,



la cui "complessità topologica" (le ~~naturali~~ proprietà qualitative, in un certo senso) non può essere dissimile da quelle di un aperto del piano.

P. es., un punto che si muove con continuità sulla sfera in $\mathbb{R}^2$ non trova mai una frontiera a impedirne il cammino, eppure la sfera è chiusa e limitata. Al contrario, un insieme chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$ deve avere dei punti di frontiera.

Def. Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$. Diciamo che Σ è una <u>superficie</u> (<u>parametrica</u>) <u>regolare aperta</u> in $\mathbb{R}^3$ se esistono $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ tali per cui:

(1) $\Phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ e $\forall (x,y) \in \Omega$: rango$(J\Phi(x,y)) = 2$

(2) $\Phi(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{ \Phi(x,y) : (x,y) \in \Omega \} = \Sigma$

(3) Φ è iniettiva.

La funzione Φ è una <u>parametrizzazione regolare</u> di Σ.

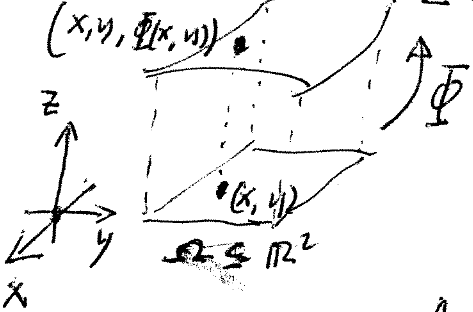
<u>Nota</u>. (i) Le richieste (2)-(3) dicono che $\Phi : \Omega \to \Sigma$ è una applicazione biunivoca.

(ii) Le richieste in (1) garantiscono la "liscezza" di Σ, con conseguenze che vedremo più sotto. La richiesta sul rango di $J\Phi$, in particolare, estende alle superfici la richiesta che una curva regolare $[a,b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$ abbia velocità non nulla, $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$, per evitare fenomeni degenerativi (vedi esempi più sotto).

Esempi. (A) Grafici di funzioni. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Ricordo che

$$\text{grafico}(f) = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Verifico che grafico(f) è una superficie regolare trovandone una parametrizzazione regolare.



$\Sigma = \text{grafico}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$

Sia $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$$\Phi(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y, f(x,y))$$

Allora $\Phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ perché $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = \left(0, 1, \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y)\right)$$

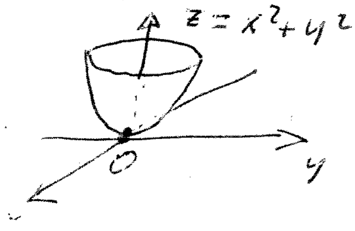
$$J\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \text{rango}(J\Phi(x,y)) \geq \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

quindi rango $J\Phi(x,y) = 2$ (essendo ovviamente ≤ 2).

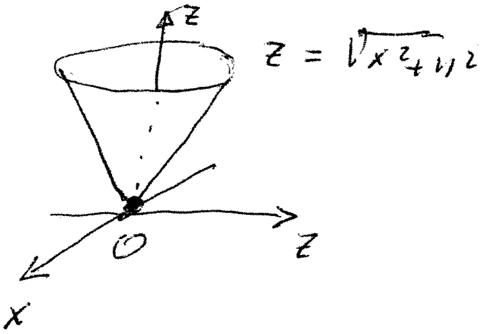
(B) Paraboloide $z = x^2 + y^2$. E' il grafico di $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Come in (A), pongo

$$\Phi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2); \quad \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$J\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$



(C) Non ci aspettiamo che il <u>cono</u> $z=\sqrt{x^2+y^2}$ sia una superficie regolare, a causa della "punta" nell'origine.



Infatti, la parametrizzazione $\Phi(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$ ~~...~~ non è differenziabile in $(0,0)$:

$\partial_x \Phi(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\partial_y \Phi(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ non sono definite in $(0,0)$.

<u>Eppure</u> il cono $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sqrt{x^2+y^2}\}$ ha una parametrizzazione C^1. Si ponga

$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Psi(u,v) = (u^3, v^3, \sqrt{u^6+v^6})$.

Ψ è iniettiva, $\Psi(\mathbb{R}^2)=\Sigma$ e $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$.

Per quest'ultima affermazione, basta mostrare che $g(u,v)=\sqrt{u^6+v^6}$ è $g\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. L'unico problema è nell'origine:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{3u^5}{\sqrt{u^6+v^6}} = \frac{3\cdot r^5}{r^3}\cdot\cos^5\theta \xrightarrow[(u,v)\to 0]{} 0 \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{3v^5}{\sqrt{u^6+v^6}} = \frac{3\cdot r^5}{r^3}\cdot\sin^5\theta \xrightarrow[(u,v)\to 0]{} 0\end{aligned}\right\} \text{in coordinate polari } \begin{cases} u = r\cdot\cos\theta \\ v = r\cdot\sin\theta\end{cases}$$

$\Rightarrow \partial_u g(0,0) = 0 = \partial_v g(0,0)$

<u>Il problema è con il rango di $J\Phi(0,0)$!</u>

$$J\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(J\Phi(0,0)) = 0.$$

In generale, vale il seguente (utile) fatto.

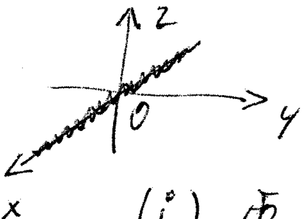
- Sia $\Sigma = \text{grafico}(f)$, con $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Allora,

$$\boxed{\begin{array}{c}\Sigma \text{ è una superficie (parametrica) regolare} \\ \text{sse} \\ f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})\end{array}}$$

cioè, se Σ è il grafico di f, la regolarità di Σ può essere verificata sulla sola f.

(D) Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $\Phi(u,v) = (u+v, 0, 0)$.

$\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $\Phi(\mathbb{R}^2) = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$ è l'asse x in $\mathbb{R}^3$.



Φ non è regolare (una retta non è una superficie!) per due motivi:

(i) Φ non è iniettiva; p.es. $\Phi(0,0) = \Phi(1,-1)$.

(ii) $J\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(J\Phi(u,v)) = 1 < 2$.

(E) Sia $\Sigma = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ la sfera di raggio unitario e centro in 0 in $\mathbb{R}^3$.

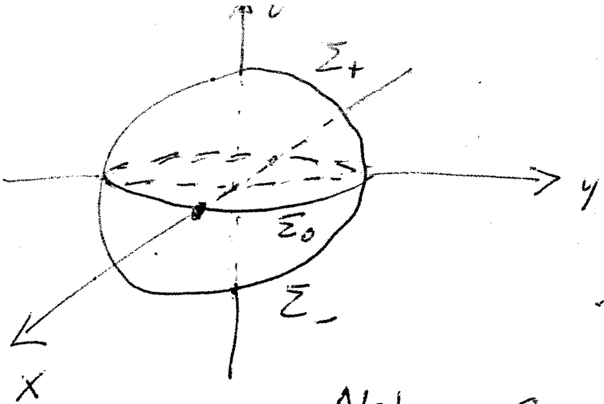
Siano $\Sigma_+ = \{(x,y,z) \in \Sigma : z > 0\}$, (calotta Nord)

$\Sigma_- = \{(x,y,z) \in \Sigma : z < 0\}$ e (calotta Sud)

$\Sigma_0 = \{(x,y,0) : x^2+y^2 = 1\}$ (Equatore)

$\Sigma_+ = \text{grafico}(f_+)$, $f_+ : \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\} \to \mathbb{R}$, $f_+(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,

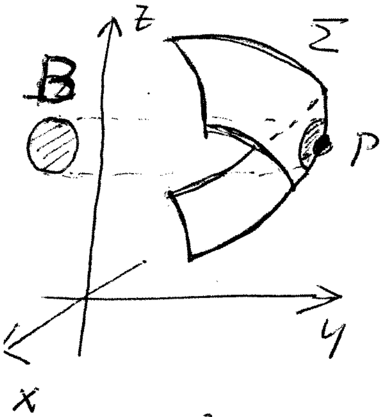
$\Sigma_- = \text{grafico}(f_-)$, $f_- : \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\} \to \mathbb{R}$, $f_-(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$



Σ è l'unione di due superfici parametriche regolari saldate lungo la circonferenza Σ_0.

<u>Nota</u>. Scambiando le coordinate tra loro, vediamo che l'equatore Σ_0 non ha, di per sé, nulla di "irregolare". In generale, si può mostrare il seguente fatto.

- Sia Σ una ~~parametrica~~ superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.



Allora, $\forall P \in \Sigma$ $\exists \varepsilon > 0$ e $\exists B \subseteq \mathbb{R}^2$ (che può essere il piano (x,y), o il piano (x,z), o il piano (y,z)), diciamo B nel piano (x,z), dove B è un disco di raggio ε, e $f \in C^1(B,\mathbb{R})$, tale che

$$\Sigma \cap \{(x,y,z) : \|(x,y,z)-P\| < \varepsilon\} = \text{grafico}(f).$$

Cioè, per ogni punto P di Σ esiste un intorno di P sulla superficie che è grafico di una funzione C^1 (scegliendo le coordinate opportune).

Questa proprietà può anche essere presa come definizione delle superfici regolari in $\mathbb{R}^3$, così includendo la sfera, il toro...