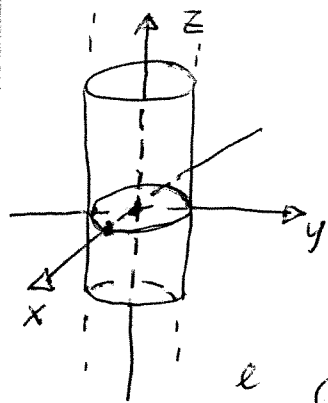


(F) Il cilindro $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.



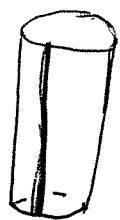
Sia $\Phi :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$$

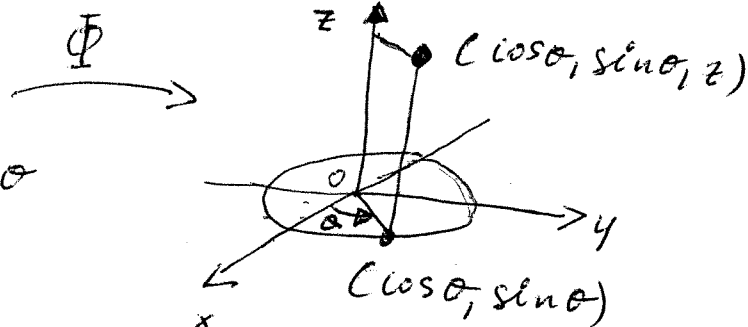
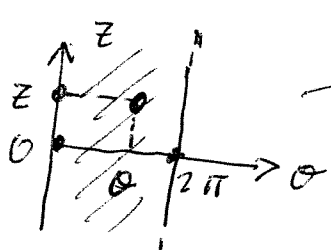
$\Phi \in C^1(]0, 2\pi[\times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, Φ è iniettiva

$$\text{e } \Phi(]0, 2\pi[\times \mathbb{R}) = \mathbb{C} \setminus \{(1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

è il cilindro G , tolti i punti di ascissa 1.



Se vogliamo includere anche quelli, occorre prendere $[0, 2\pi[\times \mathbb{R}$, che però non è aperto in $\mathbb{R}^2$.



$]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ è una striscia senza "buchi", mentre G ha un "buco": la parametrizzazione Φ deve per forza presentare qualche problema.

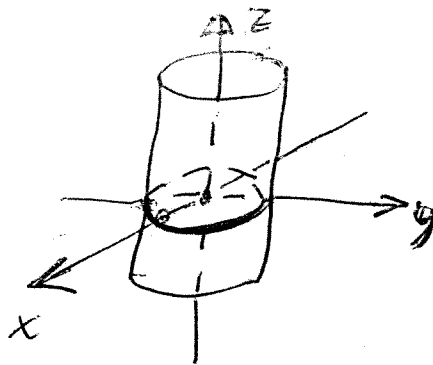
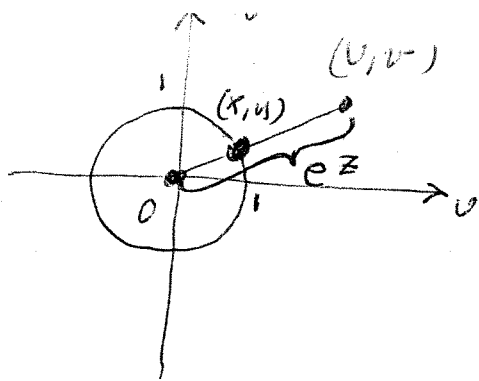
$$J\Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ha rango} = 2 \quad \forall (\theta, z).$$

Un'altra parametrizzazione. Sia $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e

$$\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Psi(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \log \sqrt{u^2 + v^2} \right)$$

$\Psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\Psi(\Omega) = G$, Ψ è iniettiva,

$$d_u \Psi(u, v) = \left(\frac{v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}^3}, \frac{-uv}{\sqrt{u^2 + v^2}^3}, \frac{u}{u^2 + v^2} \right), \quad d_v \Psi(u, v) = \left(\frac{-uv}{\sqrt{u^2 + v^2}^3}, \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + v^2}^3}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right)$$



$\Psi(u, v) = (x, y, z)$: (x, y) è la proiezione reale di (u, v) sulle circonferenze $u^2 + v^2 = 1$, e^z è il modulo di (u, v) ($z=0 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 1$).

$$J\Psi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{v^2}{R^3} & \frac{-uv}{R^3} \\ \frac{-uv}{R^3} & \frac{u^2}{R^3} \\ \frac{u}{R^2} & \frac{v}{R^2} \end{pmatrix} \quad \text{con } R = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Notare che $\det \begin{pmatrix} v^2/R^3 & -uv/R^3 \\ u/R^2 & v/R^2 \end{pmatrix} = \frac{v^3 + u^2v}{R^5} = \frac{v}{R^3} = 0 \Leftrightarrow v=0$,
mentre $\det \begin{pmatrix} -uv/R^3 & u^2/R^3 \\ v/R^2 & u/R^2 \end{pmatrix} = -\frac{uv^2 - u^3}{R^5} = -\frac{u}{R^3} = 0 \Leftrightarrow u=0$,

quindi che $\text{rank}(J\Psi(u, v)) = 2 \quad \forall (u, v) \in \Omega$.

$\Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}_1$ parametrizza regolarmente (tutto!) il cilindro. Notare che $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, al pari di $\mathbb{C}_1$, ha un "buco".

Def. Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie parametrica regolare e sia $\bar{\Phi}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione regolare; $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Sia $P = \bar{\Phi}(v_0, v_0) \in \Sigma$, $(v_0, v_0) \in \Omega$. Lo spazio tangente a Σ in P è lo spazio vettoriale

$$T_P \Sigma := \text{span} \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(v_0, v_0), \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(v_0, v_0) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

oss. Poiché $\text{rank}(J\bar{\Phi}(v_0, v_0)) = 2$, le colonne di $J\bar{\Phi}(v_0, v_0)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(T_P \Sigma) = 2$.

oss. Se $\Sigma = \text{grafico}(f)$ e $\bar{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y))$,

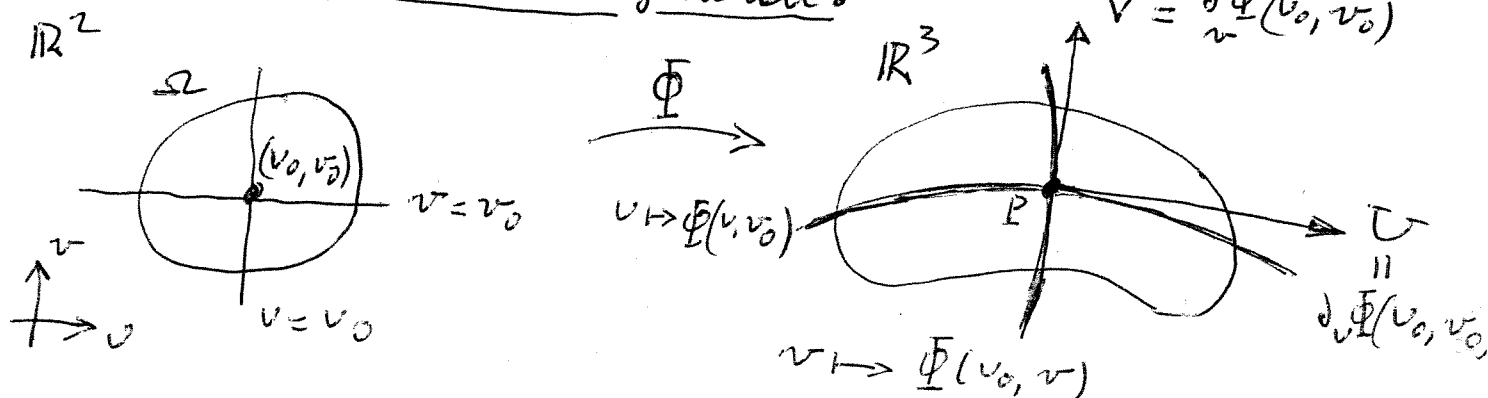
le definizioni date coincidono con le definizioni di spazio tangente al grafico di f ~~per~~ in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

In fatti:

$$U = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}(x_0, y_0) = (1, 0, \partial_x f(x_0, y_0))$$

$$\text{e } V = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}(x_0, y_0) = (0, 1, \partial_y f(x_0, y_0))$$

Una figura nel caso generale:



Consideriamo le curve $v_1 \xrightarrow{\delta} \Phi(v, v_0)$
 $v_1 \xrightarrow{\delta} \bar{\Phi}(v_0, v)$

Allora $\delta^0(v_0) = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{\Phi(v, v_0) - \Phi(v_0, v_0)}{v - v_0} = \partial_v \Phi(v_0, v_0) = \bar{v}$
 e $\bar{\delta}^0(v_0) = \dots = V$.

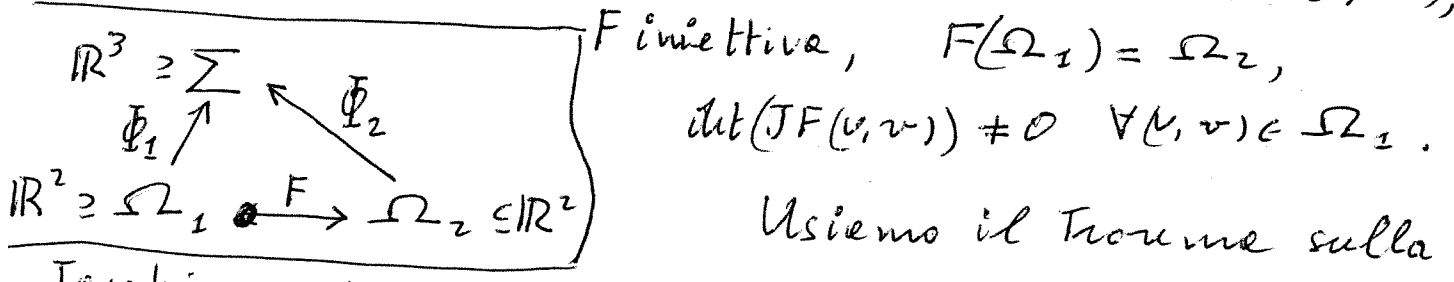
• Delle nostre definizioni sembra che le definizioni di spazio tangente dipendano dalle permutazioni, ma non è così.

Teorema. Siano $\Phi_1^0: \Omega_1^0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\Phi_2^0: \Omega_2^0 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 due permutazioni uguali sulle superficie regolari $\Sigma_1 \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia $\Sigma \ni P = \Phi_1(v_0, v_0) = \Phi_2(p_0, q_0)$.
 Allora,

$$\text{span} \left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(v_0, v_0), \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial v}(v_0, v_0) \right\} = \text{span} \left\{ \frac{\partial \Phi_2}{\partial p}(p_0, q_0), \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial q}(p_0, q_0) \right\}$$

Dimostrazione nel caso in cui le permutazioni Φ_1 e Φ_2 siano legate da una composizione:

$$\Phi_1 = \Phi_2 \circ F, \text{ con } F: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2, F \in C^2(\Omega_1, \mathbb{R}^2),$$



Usiamo il Teorema sulla

Jacobiane di una derivata. Osservo che

~~$\Phi_1(p_0, q_0) \in \mathbb{R}^3$~~ $\Phi_2(p_0, q_0) = P = \Phi_1(v_0, v_0) = \Phi_2(F(v_0, v_0))$,
 quindi (essendo Φ_2 iniettiva) $F(v_0, v_0) = (p_0, q_0)$.

Quindi

$$\begin{aligned} J\Phi_1(v_0, v_0) &= J(\Phi_2 \circ F)(v_0, v_0) = (J\Phi_2)(F(v_0, v_0)) \circ JF(v_0, v_0) \\ &= J\Phi_2(p_0, q_0) \circ JF(v_0, v_0) \end{aligned}$$

$$J\Phi_1(p_0, q_0), J\Phi_2(p_0, q_0) \in \mathcal{M}_{3 \times 2}, \quad JF(p_0, q_0) \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$$

$\begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ 2 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ 2 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 2 \\ \downarrow \\ 2 \end{matrix}$

Lemma (di algebra). Se $A = [\underline{a}_1 | \underline{a}_2] \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$ e $B = [\underline{b}_1 | \underline{b}_2] \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$ sono matrici 3×2 ($\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{b}_1, \underline{b}_2 \in \mathbb{R}^3$ sono colonne!) e $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$, e $B = A \cdot M$,

allora ~~univ~~ $\underline{b}_1, \underline{b}_2 \in \text{span} \{ \underline{a}_1, \underline{a}_2 \}$

Dim. Scrivo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$, quindi

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} b_{11} &= \alpha a_{11} + \delta a_{12} \\ b_{21} &= \alpha a_{21} + \delta a_{22} \\ b_{31} &= \alpha a_{31} + \delta a_{32} \end{aligned}$$

cioè, $\begin{cases} \underline{b}_1 = \alpha \underline{a}_1 + \delta \underline{a}_2 \\ \underline{b}_2 = \beta \underline{a}_1 + \gamma \underline{a}_2 \end{cases}$ e con conti simili

Del lemma segue che

$$J\Phi_1(p_0, q_0), J_v \Phi_1(p_0, q_0) \in \text{span} \{ J_p \Phi_2(p_0, q_0), J_q \Phi_2(p_0, q_0) \}.$$

Poiché $\det(JF(p_0, q_0)) \neq 0$, ~~allora per~~ ~~possiamo ricavare~~ ~~che~~ abbiamo

$$J\Phi_2(p_0, q_0) = J\Phi_1(p_0, q_0) \cdot (JF(p_0, q_0))^{-1}$$

e, sempre in virtù del lemma, abbiamo che $J_p \Phi_2(p_0, q_0), J_q \Phi_2(p_0, q_0) \in \text{span} \{ J_v \Phi_1(p_0, q_0), J_v \Phi_1(p_0, q_0) \}$.

Averemo entrambi gli spazi di dimensione 2, si ha il Teorema ~~che~~ oss. ~~gli~~ ogni parte degli ingegneri proiettano non sulla Terra, ma su un suo spazio tangente



Def. Un aperto Ω in $\mathbb{R}^2$ è un aperto regolare 12

se (i) Ω è limitato

(ii) $\partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega})$ + introduco qui le notazioni

(iii) Esistono ~~finite~~

$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$,
le chiusure di Ω .

in numero finito

di curve regolari $[a_i, b_i] \xrightarrow{\gamma_i} \mathbb{R}^2$, $i=1, \dots, n$,
semplici (cioè, ogni γ_i è iniettiva su $[a_i, b_i]$)
tali che (iii-1) $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i([a_i, b_i])$

(iii-2) $i \neq j \Rightarrow \gamma_i([a_i, b_i]) \cap \gamma_j([a_j, b_j]) \subseteq \{\gamma_i(a_i), \gamma_i(b_i)\} \cap \{\gamma_j(a_j), \gamma_j(b_j)\}$

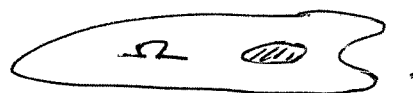
Note: La condizione (ii) esclude aperti del tipo



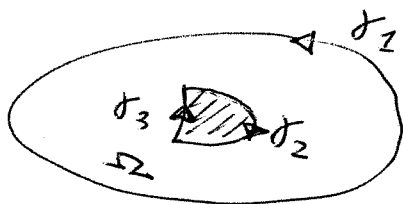
o



e anche aperti del tipo



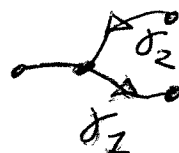
La condizione (iii) assicura che il bordo, eccettuati al più alcuni spigoli, è liscio:



(iii-2) esclude che

due curve s'incontrino

così:



Si possono incontrare così

o così

