Def. Una superficie (parametrica) regolare con bordo regolare è un insieme $\overline{\Sigma} = \Sigma \cup \partial \Sigma$ in $\mathbb{R}^3$ tale che esistono

(i) un aperto regolare $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ con bordo $\partial\Omega$;

(ii) $\Phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ t.c.

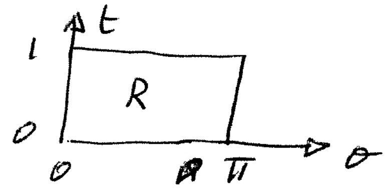
Φ è iniettiva, $\Phi(\Omega) = \Sigma$ e

Φ è una parametrizzazione regolare di Σ;

$\Phi(\partial\Omega) = \partial\Sigma$.

Esempi. Sia $\overline{R} = [0,\pi] \times [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}^2$,

$R =]0,\pi[\times]\alpha,\beta[$

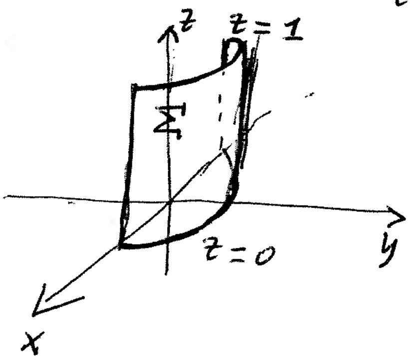


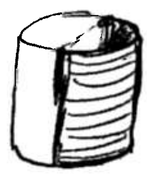
R è un aperto regolare, con bordo formato da 4 segmenti (Esercizio: trovare una parametrizzazione per i segmenti).

Sia $\Phi : \overline{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$.

$\Sigma = \Phi(R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2=1, \; 0<z<1, \; y>0\}$

e $\overline{\Sigma} = \Sigma \cup \partial\Sigma = \{(x,y,z) : \; x^2+y^2=1, \; 0 \le z \le 1, \; y \ge 0\}$.





$\overline{\Sigma}$ è la metà giacente in $y \ge 0$ del "manicotto" del cilindro x^2+y^2 compreso tra $z=0$ e $z=1$.

Def. Sia $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \partial\Sigma$ una superficie parametrica regolare con bordo regolare in $\mathbb{R}^3$ e sia $\bar{\Omega} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione regolare.

Sia $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$. L'integrale di f su $\bar{\Sigma}$ è

$$\iint_{\bar{\Sigma}} f\, d\sigma = \iint_{\bar{\Sigma}} f(P)\, d\sigma(P) \overset{dF.}{=} \iint_{\bar{\Omega}} f(\Phi(u,v)) \cdot \|\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)\| \cdot du\, dv$$

Fatto. La definizione non dipende dalla parametrizzazione regolare scelta.

Ricordo che se $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, allora

$$U \times V = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

è il prodotto vettoriale di U e V,

$U \times V \in \mathbb{R}^3$.

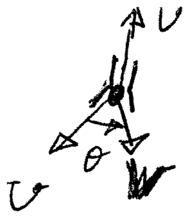
Ho posto $\underline{i} = (1,0,0)$, $\underline{j} = (0,1,0)$, $\underline{k} = (0,0,1)$ come d'uso.

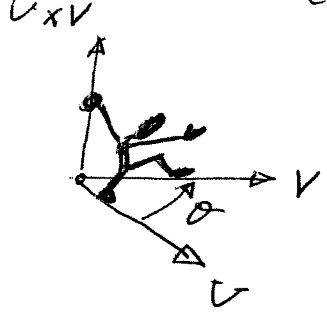
Def. $d\sigma = \|\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)\| \cdot du\, dv$ è l'elemento d'area su Σ.

Note sul prodotto vettoriale. (1) Sia $W = U \times V$.

Allora, $\|W\| = \|U \times V\| = \|U\| \cdot \|V\| \cdot \sin(\theta)$, dove θ è l'angolo formato da U e V.

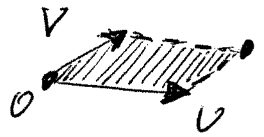
(2) Sia $W = U \times V$. Allora $W \perp U$ e $W \perp V$ (cioè, $W \cdot U = W \cdot V = 0$). Inoltre, $U \times V$ è orientato in modo che andando da U a V per l'angolo più breve ci si ritrovi a girare attorno a $U \times V$ in senso antiorario ("regola della mano destra").



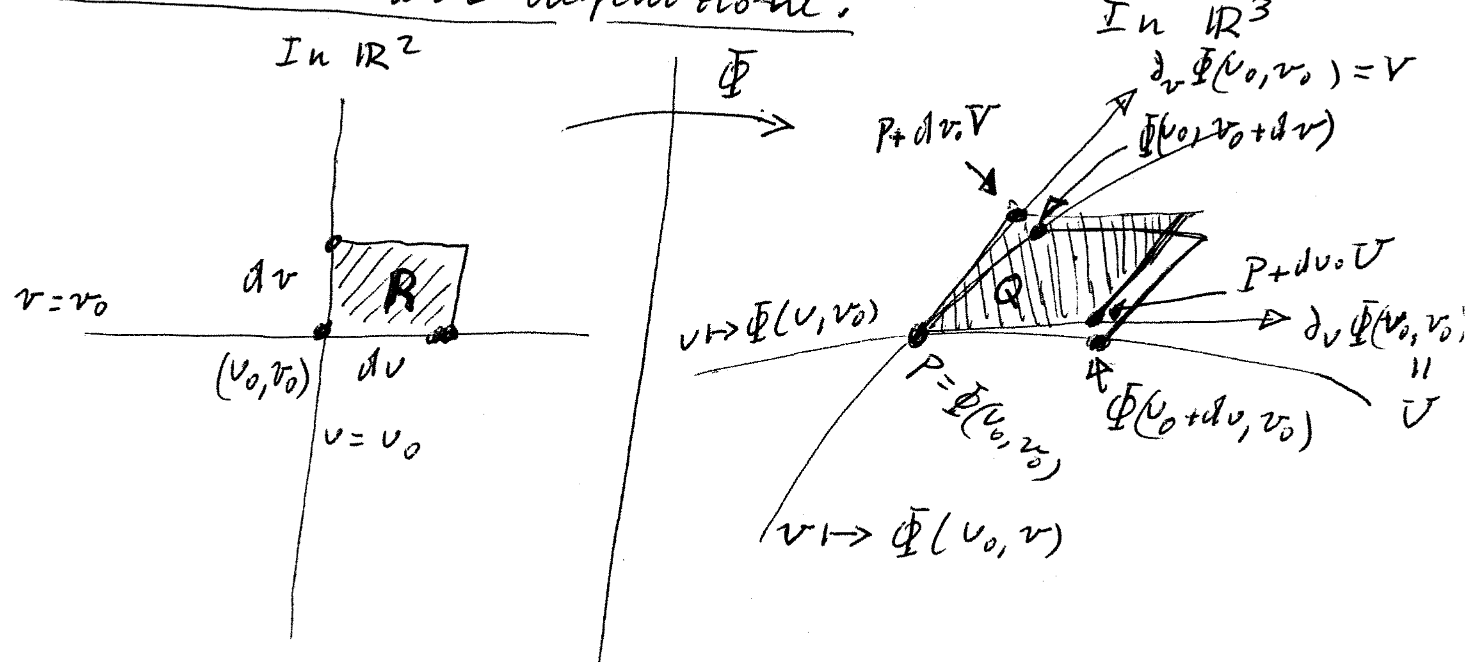


← Tenendo il "palo" $U \times V$ con la mano sinistra, partendo da U arrivo a V con un piccolo balzo.

(3) $\| U \times V \|$ è l'area del parallelogramma avente due lati consecutivi come i vettori U e V.



<u>Motivazione della definizione.</u>



$\Phi(R)$ è "ben approssimato" dal parallelogramma Q avente come lati $dv.V = dv \cdot \partial_v \Phi(u_0, v_0)$ e $du.U = du \cdot \partial_u \Phi(u_0, v_0)$.
Ora, $\text{Area}(Q) = du \cdot dv \cdot \| U \times V \| = d\sigma$.

Esempio (A) Sia Σ il mezzo manicotto di cilindro dell'esempio a p. 13 e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x + y + z^2$.

Calcolare $\displaystyle\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma(x,y,z)$.

Svolgimento. Avevamo $\Phi : [0,\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$
$\Phi(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$.

Dunque
$$J\Phi(\theta,t) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\theta \Phi(\theta,t) \times \partial_\theta \Phi(\theta,t) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i}\cos\theta + \underline{i}\sin\theta + \underline{k}.$$
$$= (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

e $d\sigma(\Phi(\theta,t)) = \|(\cos\theta, \sin\theta, 0)\| \cdot d\theta\, dt = d\theta \cdot dt$.

Finalmente,
$$\iint_{\Sigma} f\, d\sigma = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 dt \cdot f(\cos\theta, \sin\theta, t) \cdot 1 =$$
$$= \int_0^\pi d\theta \cdot \int_0^1 dt \cdot (\cos\theta + \sin\theta + t^2) =$$
$$= \int_0^\pi \left(\cos\theta + \sin\theta + \frac{1}{3}\right) d\theta = 2 + \frac{\pi}{3}$$

Esempio (B) Se Σ è il grafico di una funzione $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ (cioè, $\Phi(x,y) = (x, y, \varphi(x,y))$), allora
$$\|\partial_x \Phi(x,y) \times \partial_y \Phi(x,y)\| = \sqrt{\partial_x \varphi(x,y)^2 + \partial_y \varphi(x,y)^2 + 1}$$

Infatti,
$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \multicolumn{3}{c}{\partial_x \Phi(x,y)} \\ \multicolumn{3}{c}{\partial_y \Phi(x,y)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & k \\ 1 & 0 & \partial_x \varphi \\ 0 & 1 & \partial_y \varphi \end{vmatrix} = (-\partial_x \varphi(x,y), -\partial_y \varphi(x,y), 1)$$

Ne segue che

$$\partial_x \Phi(x,y) \times \partial_y \Phi(x,y) = (-\partial_x \varphi(x,y), -\partial_y \varphi(x,y), 1) \in \mathbb{R}^3$$

e che

$$\|\partial_x \Phi(x,y) \times \partial_y \Phi(x,y)\| = \sqrt{[\partial_x \varphi(x,y)]^2 + [\partial_y \varphi(x,y)]^2 + 1} = \sqrt{\|\nabla\varphi(x,y)\|^2 + 1}$$

quindi che, se $f : \overline{\Sigma} \to \mathbb{R}$ è continua,

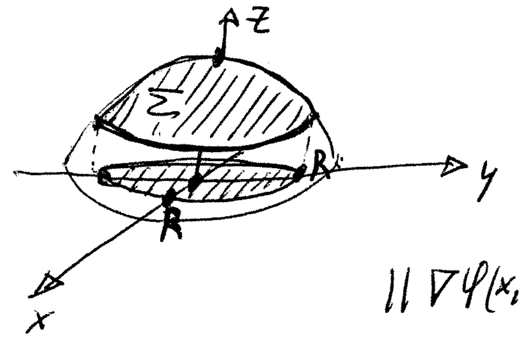
$$\iint_{\overline{\Sigma}} f(x,y,z)\, d\sigma(x,y,z) = \iint_{\overline{\Omega}} f(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \sqrt{\|\nabla\varphi(x,y)\|^2+1} \cdot dx\,dy$$

e $d\sigma(\Phi(x,y)) = \sqrt{\|\nabla\varphi(x,y)\|^2+1} \cdot dx\,dy$.

Esempio (c). Sia $\varphi : \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2 < 1\}}_{= \overline{B(0,R)}} \to \mathbb{R}$

$z = \varphi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Il grafico di φ è quella parte della sfera $\{x^2+y^2+z^2=1\}$ che sta in $z>0$ ed entro il cilindro $x^2+y^2 \le R^2$.



$\overline{\Sigma} = \text{grafico}(\varphi)$.

$$\nabla\varphi(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

$$\|\nabla\varphi(x,y)\|^2+1 = \frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2} + 1 = \frac{1}{1-x^2-y^2}$$

Quindi $d\sigma(\Phi(x,y)) = d\sigma = \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

Abbiamo ora una formula per gli integrali sulla sfera.

Se $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$, allora

$$\iint_{\Sigma} f \cdot d\sigma = \iint_{\overline{B(0,R)}} f(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) \, \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Sottoesempio (D). Calcolare, con Σ come nell'esempio (C), $\iint_{\Sigma} f\,d\sigma$, dove
$f(x,y,z) = z$.

Svolgimento: $\displaystyle\iint_{\Sigma} z\,d\sigma = \iint_{\overline{B(0,R)}} \sqrt{1-x^2-y^2} \cdot \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$$= \iint_{\{(x,y):\ x^2+y^2\le R^2\}} dx\,dy = \text{Area}(\overline{B(0,R)}) = \pi R^2.$$

Esercizio. Sia $\overline{\Omega} = \overline{B(0,R)} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}$,
$\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2}$,

- Calcolare $\displaystyle\iint_{\text{grafico}(\varphi)} (\sqrt{2z+1})^{-3}\, d\sigma(x,y,z) = I$.
- Che superficie è grafico(φ)?

Soluzione: $I = \pi \cdot \log(1+R)$