Definizione. Sia Σ una superficie (parametrica) regolare in $\mathbb{R}^3$, senza bordo o con bordo regolare. Un campo vettoriale normale unitario a Σ è un'applicazione $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c.

(i) $\nu \in C(\Sigma, \mathbb{R}^3)$

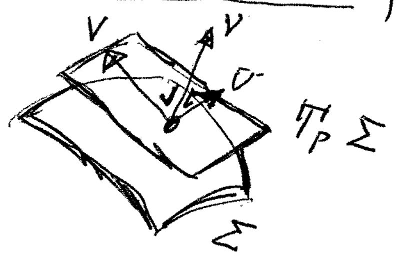
(ii) $\forall P \in \Sigma : \nu(P) \perp T_P\Sigma$

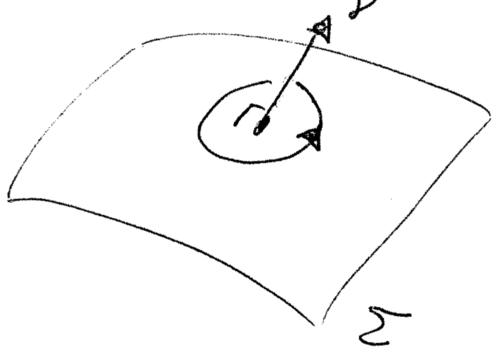
cioè, $\forall v \in T_P\Sigma : \nu(P) \cdot v = 0$

(iii) $\forall P \in \Sigma : \|\nu(P)\| = 1$.

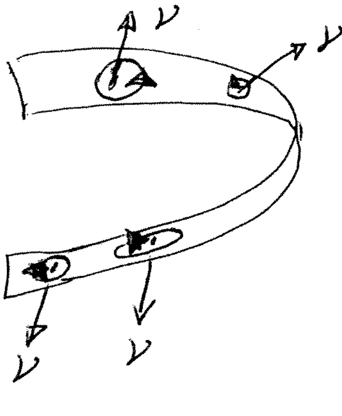
Diciamo anche che ν è un'orientazione per Σ. Se Σ ammette un campo normale, diciamo che Σ è orientabile. Ci riferiamo a (Σ, ν) come a una superficie orientata.

Figurativamente, possiamo immaginare l'orientazione

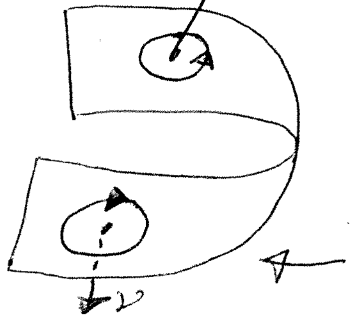




data da ν a Σ come quella che fa girare delle curve chiuse in senso antiorario attorno a ν.



← seguite i archi che ruotano in senso antiorario attorno a ν.



anche questo gira in senso antiorario attorno a una ν "rovesciata"

Possiamo contare su alcuni fatti.

- Ogni superficie parametrica regolare è orientabile.
- Ogni superficie orientabile (che ha, cioè, almeno un'orientazione) <u>ha esattamente due orientazioni</u>, una opposta all'altra: $\nu_2 = -\nu_1$
- Se $\Phi : \Omega \to \Sigma$ è una parametrizzazione regolare di Σ, allora una delle due orientazioni è

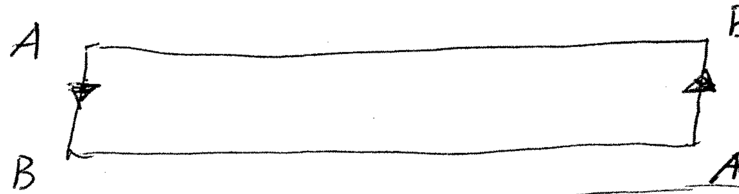
$$\nu = \frac{\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)}{\| \partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v) \|}, \quad \nu = \nu(\Phi(u,v)),$$

l'altra è $-\nu$.

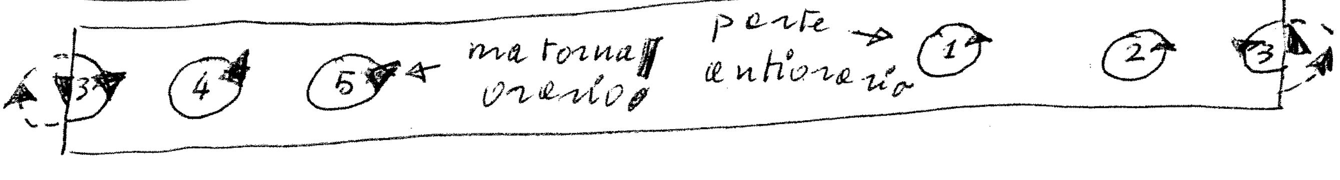
Questo ν, infatti, soddisfa tutte le condizioni di un campo normale, ~~essen~~ per le proprietà del prodotto vettoriale e di Φ.

- Alcune superfici (non parametriche) in $\mathbb{R}^3$ non sono orientabili. Per esempio, non lo è la <u>striscia di Möbius</u>.

Istruzioni per costruire una striscia di Möbius.



Incollare AB su $A'B'$, con A su A' e B su B'

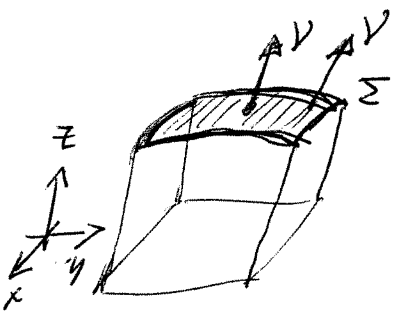


Esempio. (A) Se Σ è il grafico di una funzione $\varphi: \underset{\mathbb{R}^2}{\Omega} \to \mathbb{R}$ (con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$), allora un campo normale a Σ è dato da

$$\nu(x,y,\varphi(x,y)) = \frac{(-\partial_x \varphi(x,y), -\partial_y \varphi(x,y), 1)}{\sqrt{\|\nabla\varphi(x,y)\|^2+1}}$$

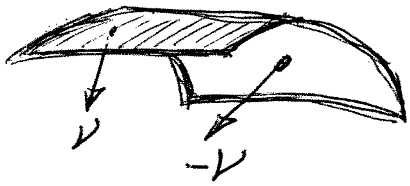
in virtù dei calcoli dell'esempio (B) a pp. 16–17.

Si osservi che la 3^a componente è positiva:



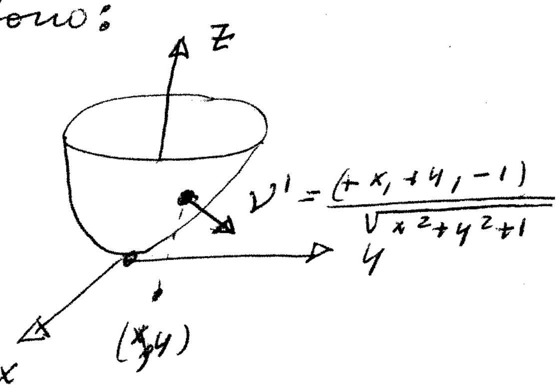
si tratta del campo normale uscente da Σ in direzione delle z crescenti.

L'altro campo è $-\nu$, che esce in direzione delle z decrescenti



Sottoesempio (B). Se $\varphi(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$, Σ è un paraboloide e i campi normali sono:

$$\nu(x,y,\varphi(x,y)) = \frac{(-x,-y,1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$



e $$\nu'(x,y,\varphi(x,y)) = \frac{(x,y,-1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

Esempio (C). Considerato il cilindro Σ,

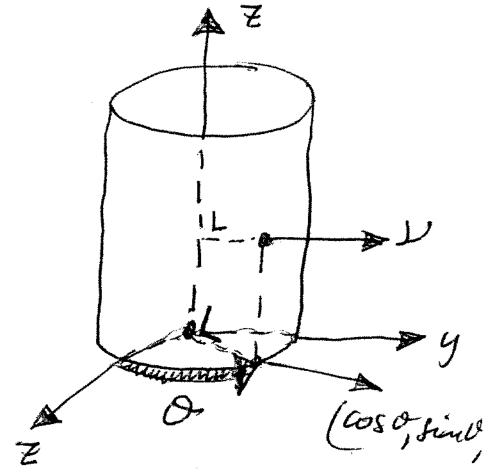
$$\Phi : [0,2\pi]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\theta,t) = (\cos\theta, \sin\theta, t),$$

come nell'esempio (F) p. 7, e usando i conti dell'esempio (A) p. 16, abbiamo una normale "esterna"

$$\nu_{EST}(\Phi(\theta,t)) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

e quella "interna"

$$\nu_{INT}(\Phi(\theta,t)) = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0).$$



Definizione. Sia (Σ, ν) una superficie (parametrica) orientata con bordo $\partial\Sigma$ regolare e sia $F \in C^1(\bar{\Sigma}, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale su $\bar{\Sigma}$. Il flusso di F attraverso Σ è

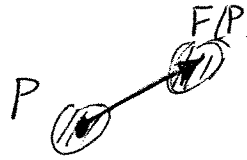
$$\text{Flusso}(F;(\Sigma,\nu)) = \iint_{\Sigma} F\cdot\nu \, d\sigma$$

Nota. $F \in C^1(\bar{\Sigma}, \mathbb{R}^3)$ significa che esiste $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $A \supseteq \bar{\Sigma}$, $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$.

Oss. $\text{Flusso}(F;(\Sigma,-\nu)) = -\text{Flusso}(F;(\Sigma,\nu))$.

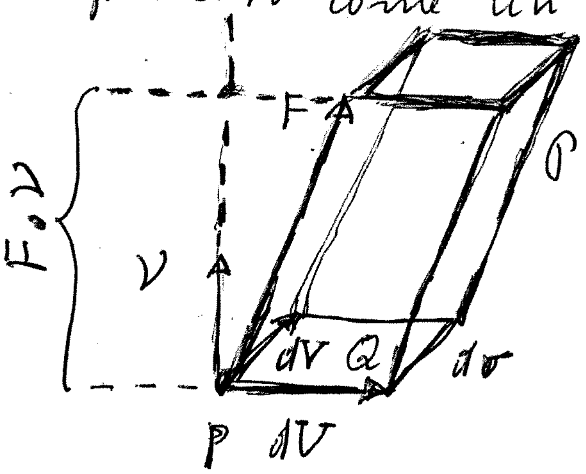
Nota. La richiesta che Σ abbia bordo e che questo sia regolare viene fatta per garantire l'esistenza dell'integrale. È possibile sostituire queste ipotesi su Σ con delle ipotesi riguardanti F.

Motivazione delle definizioni. Pensiamo a F come a un campo (stazionario) di velocità: $F(P)$ $(P \in \overline{\Sigma})$ è la velocità con cui il volume posizionato attorno a P si muove.



Se la velocità fosse $F(P)$ in ogni punto, il volume attorno a P si troverebbe traslato attorno a $P + F(P)$ nel tempo unitario.

Consideriamo ora un elemento $\mathcal{Q}$ della superficie $\overline{\Sigma}$, che può essere approssimativamente pensato come un piccolo parallelogramma avente lati $dU, dV \in \mathbb{R}^3$ e area $d\sigma$.



Nel tempo unitario, la massa fluita attraverso $\mathcal{Q}$ con velocità $F(P)$ riempie il parallelepipedo $\mathcal{P}$ avente lati $F(P)$, dU e dV.

Se $\nu = \nu(P)$ è la normale unitaria a $\mathcal{Q}$, il volume di $\mathcal{P}$ è dato da

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{Q}) \cdot \left(\begin{array}{l}\text{Proiezione di } F \text{ sulla} \\ \text{retta normale a } \mathcal{Q}\end{array}\right)$$

$$= d\sigma \cdot |F \cdot \nu|$$

Il segno del volume è scelto in modo che venga considerato positivo il flusso nella direzione di ν e negativo quello in direzione di $-\nu$. Così, si integra $(F \cdot \nu)\, d\sigma$.