<u>Def.</u> Sia (Σ, ν) una superficie (parametrica) orientata e $\Phi : \Omega \longrightarrow \Sigma$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, una sua parametrizzazione regolare. Diciamo che Φ è <u>compatibile</u> con ν se

$$\nu(\Phi(u,v)) = \frac{\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)}{\| \partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v) \|},$$

altrimenti è <u>incompatibile</u> con ν.

- Se Φ è compatibile con ν, allora (se $F \in C^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$)

$$\iint_\Sigma F \cdot \nu \, d\sigma = \iint_\Omega F(\Phi(u,v)) \cdot (\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)) \, du \, dv.$$

Infatti: $\iint_\Sigma F \cdot \nu \, d\sigma =$

$$= \iint_\Omega (F \circ \Phi) \cdot \frac{(\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi)}{\| \partial_u \Phi \times \partial_v \Phi \|} \, du \, dv.$$

- Il flusso si trova spesso scritto nel linguaggio delle <u>forme differenziali</u>. Consideriamo un <u>prodotto "wedge"</u> $\wedge$ tra elementi del tipo $\alpha du + \beta dv$:

$$(\alpha' du + \beta' dv) \wedge (\alpha'' du + \beta'' dv) =$$
$$= (\alpha' \beta'' - \beta' \alpha'') \, du \wedge dv \quad \forall \alpha', \alpha'', \beta', \beta'' \in \mathbb{R}$$

e conveniamo che $\boxed{du \wedge dv = du \cdot dv}$ sia l'elemento d'area nel piano (u,v).

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\Omega \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3 \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, con componenti: $(x,y,z) = \Phi(u,v)$. Allora,

$$dx = \partial_u x \, du + \partial_v x \cdot dv; \quad dy = \partial_u y \cdot du + \partial_v y \cdot dv; \quad dz = \partial_u z \, du + \partial_v z \, dv$$

sono i differenziali e

$$dx \wedge dy = (\partial_u x \cdot \partial_v y - \partial_v x \, \partial_u y)\, du \wedge dv$$
$$dy \wedge dz = (\partial_u y \cdot \partial_v z - \partial_v y \cdot \partial_u z)\, du \wedge dv$$
$$dz \wedge dx = (\partial_u z \cdot \partial_v x - \partial_v z \, \partial_u x)\, du \wedge dv$$

Le espressioni tra parentesi sono le stesse che ritroviamo in
$$\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_u x & \partial_u y & \partial_u z \\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i}\,(\partial_u y \cdot \partial_v z - \partial_v y\, \partial_u z) + \underline{j}\,(\partial_u z\, \partial_v x - \partial_u x\, \partial_v z) + \underline{k}\,(\partial_u x\, \partial_v y - \partial_v x\, \partial_u y)$$

Se $F = (P, Q, R)$ è un campo vettoriale,

$$F \cdot \nu \, d\sigma = (P, Q, R) \cdot (\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi)\, du \wedge dv$$

$$= P \cdot (\partial_u y\, \partial_v z - \partial_v y\, \partial_u z)\, du \wedge dv + Q \cdot (\partial_u z\, \partial_v x - \partial_u x\, \partial_v z)\, du \wedge dv$$
$$+ R \cdot (\partial_u x\, \partial_v y - \partial_v x\, \partial_u y)\, du \wedge dv$$

$$= P \cdot dy \wedge dz + Q \cdot dz \wedge dx + R \cdot dx \wedge dy.$$

Il flusso di F attraverso (Σ, ν), dove $\Sigma = \Phi(\Omega)$, e Φ è compatibile con ν, può essere quindi scritto:

$$\boxed{\iint_{\Sigma} F \cdot \nu \, d\sigma = \iint_{\Omega} P(x,y,z)\, dy \wedge dz + Q(x,y,z)\, dz \wedge dx + R(x,y,z)\, dx \wedge dy}$$

Il vantaggio di questa formulazione è che si estende facilmente a dimensioni superiori a 3, dove il prodotto vettoriale non è definito.

<u>oss.</u> $du \wedge du = (1 \cdot 0 - 0 \cdot 1)\, du \wedge dv = 0 = dv \wedge dv$

e ~~du∧dv~~ $dv \wedge du = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1)\, du \wedge dv = -du \wedge dv$

Teoremi della divergenza e di Stokes.

<u>Def.</u> Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto. Diciamo che Ω è un <u>aperto regolare</u> se:

(i) $\partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ dove $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$

(ii) Ω è limitato

(iii) $\partial\Omega = \overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2 \cup \dots \cup \overline{\Sigma}_n$ (per qualche n)

dove ciascuna $\overline{\Sigma}_j$ è una superficie regolare chiusa con bordo regolare $\partial\Sigma_j$, $\overline{\Sigma}_j = \Sigma_j \cup \partial\Sigma_j$;

(iv) $i \neq j \Rightarrow \Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$.

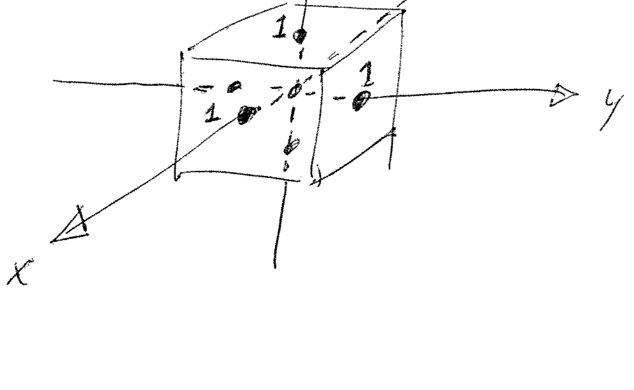
<u>Nota.</u> Valgono le osservazioni fatte a pagina 12, questa volta con un aperto in $\mathbb{R}^3$, il cui bordo è composto da superfici, anziché curve.

<u>Def.</u> La <u>normale ν a $\partial\Omega$ esterna a Ω</u> è quella scelta delle normali a Σ_j che punta verso l'esterno di Ω ($j = 1, \dots, n$).

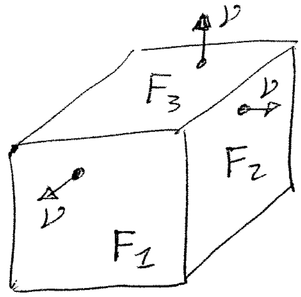
<u>OSS.</u> Vedremo qui sotto che la normale esterna è ben definita in ogni punto $P \in \partial\Omega$, tranne che per i (pochi) punti che stanno sui bordi delle Σ_j.

<u>Esempio.</u> Consideriamo il cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^3$,

$Q = \{(x,y,z) : |x|<1;\ |y|<1;\ |z|<1\}$:



La frontiera di Q è $\partial Q = \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2 \cup \overline{F}_3 \cup \overline{F}_4 \cup \overline{F}_5 \cup \overline{F}_6$, un'unione di facce:



$$\overline{F}_1 = \{(1, y, z) : |y| \le 1,\ |z| \le 1\}$$

$$\overline{F}_2 = \{(x, 1, z) : |x| \le 1,\ |z| \le 1\}$$

$$\overline{F}_3 = \{(x, y, 1) : |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$$

$$\overline{F}_4 = \{(-1, y, z) : |y| \le 1,\ |z| \le 1\}$$

$$\overline{F}_5 = \{(x, -1, z) : |x| \le 1,\ |z| \le 1\}$$

$$\overline{F}_6 = \{(x, y, -1) : |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$$

L'intersezione di due facce è vuota o è unione di spigoli.

La normale esterna a Q può essere calcolata o dedotta geometricamente.

Su F_1: $\nu(1, y, z) = (1, 0, 0)$

e su F_4: $\nu(-1, y, z) = (-1, 0, 0)$ eccetera...

Posso anche fare un calcolo preciso.

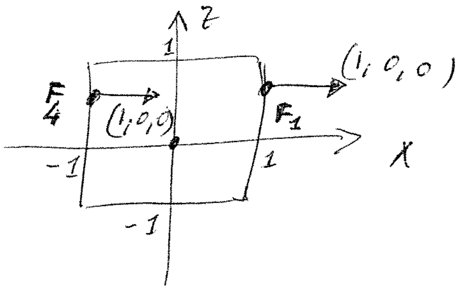
Scelgo la parametrizzazione $\Phi_1 : (y, z) \mapsto (1, y, z)$ per F_1.

$\partial_y \Phi_1 = (0, 1, 0)$, $\partial_z \Phi_1 = (0, 0, 1)$ e

$$\partial_y \Phi_1 \times \partial_z \Phi_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0)$$

: il vettore è normale e punta all'esterno di Q.

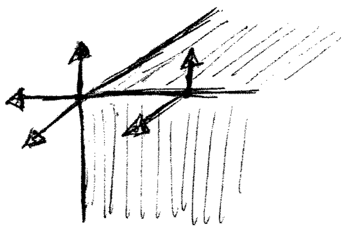
Per F_4 potrei porre $\Phi_2 : (y, z) \mapsto (-1, y, z)$ che mi dà ugualmente $\partial_y \Phi_1 \times \partial_z \Phi_1 = (1, 0, 0)$: sempre un vettore normale, che però punta verso l'interno di Q:



Φ_1 è compatibile con la normale esterna

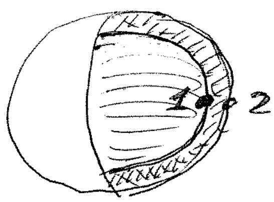
Φ_2 non è compatibile con la normale esterna

Sugli spigoli di Q la normale esterna non è definita (ho due possibili definizioni sugli spigoli, addirittura tre sui vertici). Questo non costituisce un problema quando calcolo integrali di superficie.



Esempio. Consideriamo il guscio

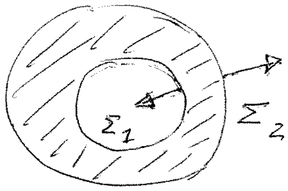
$$\overline{\Omega} = \{(x,y,z): \quad 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}.$$



$\overline{\Omega}$ in sezione con dimensioni alterate.

$$\partial\Omega = \{(x,y,z): \ x^2+y^2+z^2=1\}$$
$$\cup \{(x,y,z): \ x^2+y^2+z^2=4\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

è l'unione di sfere concentriche.



$$(x,y,z) \in \Sigma_1 \Rightarrow \nu(x,y,z) = -\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$(x,y,z) \in \Sigma_2 \Rightarrow \nu(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{2}$$

La normale esterna al guscio su Σ_1 punta al centro della "bolla" $x^2+y^2+z^2<1$, mentre la normale esterna al guscio su Σ_2 punta all'esterno di tutta la figura.

Definizione. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$.
~~La~~ la divergenza di F è $\operatorname{div} F : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$; $\operatorname{div} F \in C(\bar{\Omega})$,

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \partial_x P(x,y,z) + \partial_y Q(x,y,z) + \partial_z R(x,y,z)$$

se $F = (P, Q, R)$.

Teorema della divergenza. Sia Ω un aperto regolare in $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega = \bar{\Sigma}_1 \cup \dots \cup \bar{\Sigma}_n$ come nella def. a p. 26.

Allora,

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz,$$

dove $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \iint_{\Sigma_j} F \cdot \nu \, d\sigma$ per definizione.

Esempio. Sia Q il cubo dell'esercizio precedente e $F(x,y,z) = (x, y, z)$. Allora, $\operatorname{div} F = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3$

e $\iint_{\partial Q} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_Q 3 \, dx\, dy\, dz = 3 \cdot \text{Volume}(Q) = 3 \times 2^3 = 24.$

Più in generale, se $p+q+r = 1$, ~~allora~~ e $F(x,y,z) = (px, qy, rz)$,

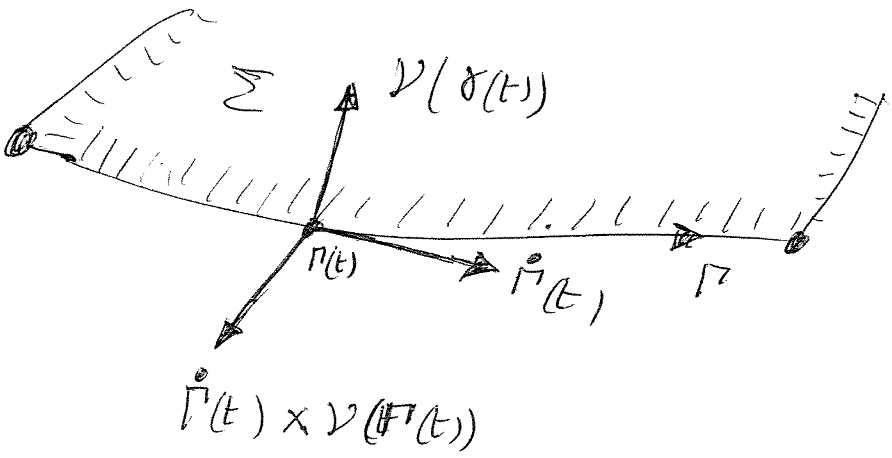
$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \text{Volume}(\Omega).$$

- Trovare una ragione fisica per cui, ~~se $F(x,y,z) = (x,0,0)$~~, ~~il flusso~~ se F è costante si ha che

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \text{Flusso di } F \text{ attraverso } (\partial\Omega, \nu) = 0.$$

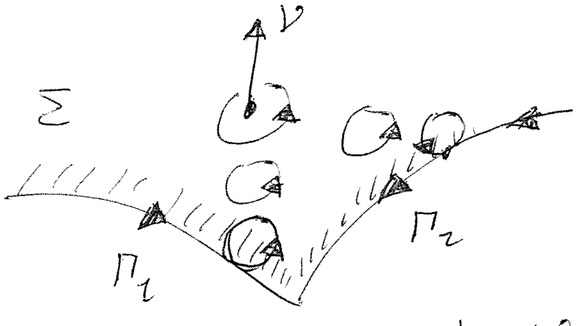
Df. Sia $(\overline{\Sigma},\nu)$ una superficie (parametrica) orientata, chiusa, con bordo regolare e sia $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ una curva semplice regolare su $\partial\Sigma$: $\forall t\in[a,b]: \Gamma(t)\in\partial\Sigma$.

La curva Γ è <u>compatibile</u> <u>con</u> <u>l'orientamento</u> ν di Σ se per qualche (equivalentemente, per ogni) $t\in[a,b]$: $\dot{\Gamma}(t)\times\nu(\Gamma(t))$ punta verso l'<u>esterno</u> di Σ.



<u>OSS.</u> Equivalentemente, $\nu(\Gamma(t))\times\dot{\Gamma}(t)$ punta verso l'interno di Σ.

- Una diversa maniera per verificare la compatibilità.



A ν è associato un verso di rotazione su Σ (vedi p. 19). Un cammino circolare orientato secondo ν può trovarsi, muovendosi verso Γ, nella direzione di Γ (e allora Γ è <u>compatibile</u>) o nella direzione opposta a Γ (che è <u>non compatibile</u>). In figura: Γ_1 è compatibile, Γ_2 è incompatibile con ν.

<u>OSS.</u> Se Γ è <u>incompatibile</u> con ν, allora Γ^{-1} (cioè, Γ percorsa in senso inverso) è <u>compatibile</u> con ν, e viceversa.

<u>Df.</u> Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale C^1 su Ω. Il <u>rotore</u> <u>di</u> F è $\operatorname{Rot} F: \Omega \to \mathbb{R}^3$, il campo vettoriale (continuo): $F = (P, Q, R) \Rightarrow$

$$\operatorname{Rot} F(x,y,z) := \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{df.}}{=} \underline{i}\,(\partial_y R - \partial_z Q) + \underline{j}\,(\partial_z P - \partial_x R) + \underline{k}\,(\partial_x Q - \partial_y P)$$

$$= (\partial_y R - \partial_z Q,\ \partial_z P - \partial_x R,\ \partial_x Q - \partial_y P).$$

<u>Teorema di Stokes.</u> Sia (Σ, ν) una superficie (parametrica) orientata, chiusa, ~~con~~ regolare e con bordo regolare e sia $\partial\Sigma$ l'unione di curve regolari semplici <u>orientate compatibilmente</u> con ν. Sia $\Sigma \subseteq \Omega$ aperto in $\mathbb{R}^3$ e $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Allora,

$$\underbrace{\iint_{\Sigma} (\operatorname{Rot} F) \cdot \nu \, d\sigma}_{\boxed{\text{Flusso di Rot } F \text{ attraverso } \Sigma.}} = \underbrace{\int_{\partial\Sigma} F \cdot dw}_{\boxed{\text{Lavoro di } F \text{ lungo } \partial\Sigma}}$$