Esercizi sugli integrali

Nicola Arcozzi

2007

1 Uso del Teorema di Cavalieri-Fubini-Tonelli.

(0) Sia $\Omega = \left\{(x,y):\ y \le \frac{x}{2},\ y+x \ge 0,\ y-x+2 \ge 0\right\}$ e sia $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Trovare $a \le b$, $a, b \in \mathbb{R}$ e, per $x \in [a,b]$, l'intervallo Ω_x tali che:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\Omega_x} f(x,y)dy \right\} dx.$$

(1) Sia $\Omega = \left\{(x,y):\ x^2 - 1 \le y \le 2\right\}$ e sia $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Trovare $a \le b$, $a, b \in \mathbb{R}$ e, per $x \in [a,b]$, l'intervallo Ω_x tali che:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\Omega_x} f(x,y)dy \right\} dx.$$

(2) Sia $\Omega = \{(x,y):\ xy \ge 1,\ x+y \le 4,\ x \ge 0\}$. Trovare $c \le d$, $c, d \in \mathbb{R}$ e, per $y \in [c,d]$, l'intervallo Ω^y tali che, per ogni funzione $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\Omega^y} f(x,y)dx \right\} dy.$$

(3) Sia $\Omega = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 16,\ (x-4)^2 + y^2 \ge 4\right\}$. Trovare $c \le d$, $c, d \in \mathbb{R}$ e, per $y \in [c,d]$, l'intervallo Ω^y tali che, per ogni funzione $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\Omega^y} f(x,y)dx \right\} dy.$$

(4) Sia $A = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 25,\ \frac{(x-2)^2}{4} + 4y^2\ \le 1\right\}$. Scomporre $A = A_1 \cup A_2$, dove A_1 e A_2 sono insiemi chiusi, y-semplici e tali che $\overset{\circ}{A}_1 \cap \overset{\circ}{A}_2 = \emptyset$.

(5) Sia $\Omega = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \ge 16,\ (x+3)^2 + y^2 \le 4\right\}$. Trovare $c \le d$, $c, d \in \mathbb{R}$ e, per $y \in [c,d]$, l'intervallo Ω^y tali che, per ogni funzione $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\Omega^y} f(x,y)dx \right\} dy.$$

(6) Disegnare la regione

$$\begin{aligned}\Omega &= \\ &= \Big\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 100,\ (x-4)^2+(y-4)^2 \ge 1, \\ &\quad (x+4)^2+(y-4)^2 \ge 1,\ \frac{x^2}{9}+(y+2)^2 \ge 1\Big\}.\end{aligned}$$

Se fate il disegno correttamente, dovreste vedere una sorta di "faccia".

(7) Sia $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$; $\Omega_1 = \{(x,y):\ y \ge 2x,\ y \ge -2x,\ y \le 4\}$, $\Omega_2 = \big\{(x,y):\ x^2+(y-5)^2 \le 5\big\}$.

Trovare quindi $c, d \in \mathbb{R}$, $c \le d$, e funzioni $\phi : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni funzione $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ si abbia:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right\} dy.$$

2 Integrali doppi

[Quelli contrassegnati con un (*) sono un pó piú brigosi.] Calcolare l'integrale su Ω della funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ per le seguenti assegnazioni di f e Ω.

(1) $\Omega = \{(x,y):\ -1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$, $f(x,y) = 2xy^2 - y$.

(2*) Trovare l'area della "luna" $\Omega = \big\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1,\ (x+2)^2+y^2 \ge 4\big\}$.[1]

(3) Trovare l'area della regione anulare asimmetrica:

$$\Omega = \big\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 24,\ (x-1)^2+(y-1)^2 \ge 1\big\}.$$

(4) $\Omega = \big\{(x,y):\ \frac{1}{2}x \le y \le -\frac{1}{2}x,\ x \ge -\frac{\pi}{2}\big\}$, $f(x,y) = \cos(2y)\cos(x)$.

(5) $\Omega = \big\{(x,y):\ y^2 - x^2 \le 1,\ 0 \le x \le 1\big\}$, $f(x,y) = x\frac{e^y}{\sqrt{1+x^2}}$.

(6) $\Omega = \big\{(x,y):\ x \le 2 - y^2, x - 1y \le x+1\big\}$, $f(x,y) = \sin(yx)$.[2]

3 Altri integrali doppi

Calcolare l'integrale su Ω della funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ per le seguenti assegnazioni di f e Ω.

(1) $\Omega = \big\{(x,y):\ x^2 \le y \le x\big\}$, $f(x,y) = xy$.

(2*) $\Omega = \big\{(x,y):\ \cos(x) \le y \le \sin(x),\ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi\big\}$, $f(x,y) = x$.

[1] Ricordare che per integrare $\sqrt{1-t^2}$ conviene sostituire $t = \sin(s)$ o $t = \cos(t)$.

[2] Ho corretto il dominio, che nella versione precedente risultava illimitato.

(3) $\Omega = \left\{(x,y): \ \frac{y}{2} \le x \le 2y, \ x+y \le 1\right\}$, $f(x,y) = 2x + 3e^y$.

(4) $\Omega = \{(x,y): \ 0 \le x \le y \le 1\}$, $f(x,y) = e^{-y^2}$.[3]

(5) $\Omega = \left\{(x,y): \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} \le 1, \ (x-3)^2 + y^2 \ge 1\right\}$, $f(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2}$.

(6) $\Omega = \left\{(x,y): \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \le 1, \ (x-3)^2 + y^2 \ge 1\right\}$, $f(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2}$.

[3] Cambiato il dominio: con quello precedente c'erano difficoltà insormontabili. Il teorema di Cavalieri va applicato con le variabili nell'ordine "giusto", altrimenti si finisce in un vicolo cieco.

Alcune soluzioni. (2.1) $5/2$.

(2.2) Può essere utile procedere nella maniera seguente. Si sottrae all'area della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 (che vale π) l'area della regione a forma di "mandorla" asimmetrica $\Omega' = \big\{(x,y): \ x^2+y^2 \le 1, \ (x+2)^2+y^2 \le 4\big\}$. Per calcolare quest'ultima, si trova che le intersezioni delle due circonferenze hanno ascissa $x=-1/4$. Si calcolano, dunque, separatamente le aree delle due parti di Ω' aventi $x \le -1/4$ e $x \ge -1/4$, rispettivamente. Su ciascuna delle due regioni si può usare la sostituzione $x = \cos(t)$ o $x = 2\cos(t)$, a seconda della regione che si sta considerando. La soluzione è:

$\pi - \arccos(1/4) + 1/2 \cdot \sin(2\arccos(1/4)) - 4\arccos(7/8) + 4 \cdot 1/2 \cdot \sin(2\arccos(7/8))$ $= \pi - \arccos(1/4) + \frac{\sqrt{15}}{16} - 4\arccos(7/8) + 4 \cdot \frac{7\sqrt{15}}{64}$.

Si può risolvere l'integrale anche per via del tutto geometrica, calcolando, sommando e sottraendo aree di settori circolari e triangoli.

(2.3) Le due circonferenze sono contenute una nell'altra e devo calcolare l'area della regione compresa tra le due. Sottraggo quindi le aree delle circonferenze: $24\pi - \pi = 23\pi$.

(2.4) Per simmetria rispetto a $y=0$, $I = 2\int_{-\pi/2}^{0} \cos(x) \int_0^{-x/2} \cos(2y)dydx = 1/2$.

(2.5) $e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} - e - e^{-1}$.

(2.6) Per la simmetria del dominio e per l'antisimmetria della funzione integranda, l'integrale vale 0.

(3.1) $1/24$.

(3.2) $3/2 \cdot \pi$.

(3.3) L'integrale si riduce a $\int_0^{1/3} 3x^2dx + 3\int_0^{1/3}(e^{2x} - e^{x/2})dx + \int_{1/3}^{2/3} x(2-3x)dx + 3\int_{1/3}^{2/3}(e^{1-x} - e^{x/2})dx$.

(3.4) $1/2 \cdot (1 - e^{-1})$.

(3.5) e (3.6) Entrambi gli integrali valgono banalmente 0 per simmetria del dominio e antisimmetria della funzione.