ESERCIZI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Nicola Arcozzi, Analisi Matematica L-A

October 13, 2006

Alcuni esercizi a risposta multipla sulle funzioni continue.

(1) Siano $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ e $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, $f(-1) = 4$, $f(1) = 3$, $g(-1) = 1$, $g(1) = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) Esiste c in $[-1,1]$ tale che $2 \cdot f(c) = 4 \cdot g(c)$.

(ii) Esiste c in $[-1,1]$ tale che $f(c) = g(c)$.

(iii) La funzione f è decrescente su $[-1,1]$.

(iv) Esiste c in $[-1,1]$ tale che $f(c) \cdot g(c) = 0$.

(2) Siano $f : [-2,-1] \to \mathbb{R}$ e $f : [-2,-1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, $f(-2) = 2$, $f(-1) = -1$, $g(-2) = -1$, $g(-1) = -2$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) g ha massimo in $(-2,-1)$.

(ii) Esiste x in $[-2,-1]$ tale che $f(x)g(x) = 0$.

(iii) Per ogni x in $[-2,-1]$, $g(x) < 0$.

(iv) Esiste x in $[-2,-1]$ tale che $f(x) = g(x)$.

(3) Siano $f : [-2,-1] \to \mathbb{R}$ e $g : [-2,-1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, $f(-2) = 0$, $f(-1) = 1$, $g(-2) = -1$, $g(-1) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) f ha massimo in $[-2,-1)$.

(ii) Esiste x in $[-2,-1]$ tale che $f(x) \cdot g(x) > 0$.

(iii) Esiste x in $[-2,-1]$ tale che $f(x) = -g(x)$.

(iv) Esiste x in $[-2,-1]$ tale che $f(x) = g(x)$.

(4) Siano $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ e $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $g(1) = 1$, $g(2) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) Esiste x in $[1,2]$ tale che $3f(x) - 2g(x) = 10$.

(ii) Esiste x in $[1,2]$ tale che $3f(x) + 2g(x) = 10$.

(iii) Esiste x in $[1,2]$ tale che $f(x) \cdot g(x) = 66$.

(iv) Esiste x in $[1,2]$ tale che $6f(x) - 4g(x) = f(x) \cdot g(x)$.

(5) Siano $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ e $g : [2,3] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, $f(2) = -1$, $f(3) = 2$, $g(2) = 2$, $g(3) = -3$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(i) Esiste x in $[2,3]$ tale che $f(x) \cdot g(x) = 0$.

(ii) Esiste x in $[2,3]$ tale che $f^2(x) + g^2(x) = 4$.

(iii) Esiste x in $[2,3]$ tale che $(f(x) + 2) \cdot (g(x) + 4) = 3$.

(iv) Esiste x in $[2,3]$ tale che $5 \cdot f(x) + 3 \cdot g(x) = 0$.

Alcuni esercizi a sulle funzioni continue.

Dire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere e quali false. Illustrare con una figura e, per le affermazioni false, dare un controesempio concreto.

(1) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b)$. Allora, f ha massimo in $[a,b)$, ma non in $[a,b]$.

(2) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b)$, e sia $c \in [a,b)$. Allora,f ha minimo in $[a,c]$.

(3) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b)$ e discontinua in b. Allora, f non ha massimo in $[a,b]$.

(4) Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora, $f + g$ ammette massimo in $[a,b]$.

(5) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $f(a) = -1$, $f(b) = 1$. Sia $c = \frac{a+b}{2}$ il punto medio di $[a,b]$. Allora, $f(c) = 0$.

(6) Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni e supponiamo che $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $g(a) = 1$ e $g(b) = 0$. Allora, esiste $x \in [a,b]$ t.c. $f(x) = g(x)$.

(7) Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e supponiamo che $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $g(a) = 1$ e $g(b) = 0$. Allora, esiste $x \in [a, b]$ t.c. $f(x) = g(x)$.

(8) Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e supponiamo che $f(a) = 1$, $f(b) = 11$, $g(a) = 2$ e $g(b) = 12$. Allora, esiste $x \in [a, b]$ t.c. $f(x) = g(x)$.

(9) Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e supponiamo che $f(a) = 1$, $f(b) = -1$, $g(a) = -1$ e $g(b) = -2$. Allora, esiste $x \in [a, b]$ t.c. $f(x) \cdot g(x) = 0$.

(10) Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e supponiamo che $f(a) = 1$, $f(b) = -1$, $g(a) = -1$ e $g(b) = -1$. Allora, esiste $x \in [a, b]$ t.c. $f(x) + g(x) = f(x) \cdot g(x)$.

(11) Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue, f strettamente crescente e g strettamente crescente, e supponiamo che $f(a) = 0$, e $g(a) = 1$. Allora, esiste $x \in [a, b]$ t.c. $f(x) = g(x)$.

(12) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente crescente su $[a, b]$, $f(a) = -2$ e $f(b) = 1$. Allora, esiste $f^{-1} : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ e $f^{-1}([-1, 0])$ è un intervallo contenuto in $[a, b]$.

Soluzioni. Sono vere (2), (4), (7), (9), (10), (12). Le altre sono false.

Altri esercizi sulle funzioni continue (piú di una risposta potrebbe essere corretta).

(1) Sia $f \in C((-1, 1])$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
(b) $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1-n}{n}\right)$ esiste in $\mathbb{R}^*$.
(c) Se $f(0) = 1$ e se $f(1) = 0$, allora esiste $x \in (0, 1)$ tale che $f(x) = 1/2$.
(d) f è limitata su $(-1, 0]$.
(e) f è limitata su $(0, 1]$.

(2) Sia $f \in C((-1, 2))$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
(a) $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1-n}{2n}\right)$ esiste in $\mathbb{R}^*$.
(b) $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{2}\right)$ esiste in $\mathbb{R}$.
(c) $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{n-n^3}{3n^2+1-n^3}\right)$ esiste in $\mathbb{R}^*$.
(d) $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = f(1)$.
(e) $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = f(0)$.

(3) Sia $f \in C([-1, 0] \cup [1, 2])$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

(e) Se f è crescente e $f(-1) \leq 0 \leq f(2)$, allora esiste $x \in [-1, 0] \cup [1, 2]$ tale che $f(x) = 0$.

(f) Se f è crescente e $f(-1) < 0 \leq f(0)$, allora esiste $x \in [-1, 0] \cup [1, 2]$ tale che $f(x) = 0$.

(4) Sia $f \in C([-2, -1))$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

(a) f ha minimo in $[-2, -1)$.

(b) Per ogni x in $[-2, -1)$, $f(x) < 0$.

(c) Se f è crescente su $[-2, -1)$, allora esiste $\min f$.

(d) Se f è crescente su $[-2, -1)$, allora esiste $\max f$.

Soluzioni. (1) c, e; (2) a, c, e; (3) f; (4) c.