ESERCIZI SUI LIMITI DI FUNZIONI (senza derivate)

Nicola Arcozzi

October 30, 2009

Calcolare i seguenti limiti di successioni

$$\lim_{x\to 0^+} x^x;\ \lim_{x\to 0^+} x^{x^2};\ \lim_{x\to 0^+} x^{2^x};\ \lim_{x\to 0^+} \left(x^2\right)^x;\ \lim_{x\to 0^+} x^{x\log(x)} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3};\ \lim_{x\to 2^+} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3};\ \lim_{x\to 3^+} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}; \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} e^{x-1}\frac{(x-1)^2-2(x-1)+1}{x^2-3x+2};\ \lim_{x\to 2^+} e^{x-1}\frac{(x-1)^2-2(x-1)+1}{x^2-3x+2}; \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}};\ \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}};\ \lim_{x\to +\infty} xe^{\frac{1}{x}};\ \lim_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x}};\ \lim_{x\to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}}; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x};\ \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x};\ \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x};\ \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x};\ \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}; \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{x^2-1} \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 3} \cos(\pi x)\frac{x^2-4x+1}{x^2-5x+2} \tag{7}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}};\ \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\log(x)}};\ \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{\log(x)}}};\ \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{2^x}};\ \lim_{x\to +\infty} x^{-\frac{1}{\sqrt{\log(x)}}}; \tag{8}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\log|x|+\frac{1}{x}\right);\ \lim_{x\to -\infty} \left(\log|x|+\frac{1}{x}\right);\ \lim_{x\to 0^-} \left(\log|x|+\frac{1}{x}\right);\ \lim_{x\to 0^+} \left(\log|x|+\frac{1}{x}\right); \tag{9}$$

Data la funzione

$$f(x) = x\log|x|e^{-\frac{1}{x}}, \tag{10}$$

trovare i valori di x per cui è definita: si tratterà di un'unione di intervalli in $\mathbb{R}$. Calcolare poi i limiti di $f(x)$ al tendere di x a ciascun estremo di questi intervalli. Trovare poi i valori di x per cui $f(x) = 0$ e usare queste informazioni per tracciare un grafico approssimativo di f.

Soluzioni. (1) $1, 1, 0, 1, 1$; (2) $1/2, 0, -\infty$; (3) $+\infty, 0$; (4) $+\infty, 0, +\infty, -\infty, -\infty$; (5) $+\infty, 0, 0, 0, -\infty$; (6) 1; (7) $1/2$; (8) $1, e, +\infty, 1, 0$; (9) $+\infty, +\infty, -\infty, +\infty$; (10) f è definita su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e abbiamo i seguenti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty; \ \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty; \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0; \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$