ALCUNI ESEMPI DI DOMANDE CHE POTREBBERO ESSERE FATTE (PER ISCRITTO) DURANTE LA PROVA ORALE

Nicola Arcozzi

(1) Siano $a_1, \dots, a_n$ vettori colonna di $\mathbb{R}^n$ e sia

$$A = [a_1|a_2|\dots|a_n]$$

la matrice aventi $a_1, \dots, a_n$ come colonne. Quali delle seguenti condizioni sono equivalenti al fatto che $\{a_1, \dots, a_n\}$ sia una famiglia di vettori linearmente indipendenti?

(i) $det(A) \neq 0$.

(ii) Il sistema $Ax = 0$ ha almeno una soluzione ($x \in \mathbb{R}^n$ essendo il vettore delle incognite e 0 essendo l'elemento neutro di $\mathbb{R}^n$).

(iii) Il sistema $Ax = b$ ha esattamente una soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{R}^n$ essendo il vettore delle incognite e b essendo un vettore dato in $\mathbb{R}^n$).

(iv) Non esistono numeri reali $c_1, \dots, c_n$ tali che

$$c_1a_1 + \dots + c_na_n = 0.$$

(v) Per ogni scelta di numeri reali $c_1, \dots, c_n$, se

$$c_1a_1 + \dots + c_na_n = 0$$

allora $c_1 = c_2 = \dots c_n$.

[La risposta giusta è (i), (iii), (v)].

(2) Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili sugli intervalli I e J, rispettivamente. Supponiamo che $f(I) \subseteq J$ e che

$$h = g \circ f$$

Allora, per $x \in I$,

$$h'(x) = \ldots?$$

[Risposta: $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$]

(3) Enunciare un teorema a scelta tra quelli di Fermat, Rolle e Lagrange, distinguendo bene tra ipotesi e tesi del teorema e definendo tutti i termini che compaiono nel suo enunciato.

Eventualmente, illustrare il teorema con il grafico di una funzione e commentare il motivo per cui le ipotesi sono necessarie.

(4) Dare una delle seguenti definizioni. Definizione di limite di una successione. Definizione di limite di una funzione. Definizione di funzione continua in un punto.

Per la definizione scelta, enunciare alcuni teoremi rilevanti sull'oggetto definito.

(5) Il seguente teorema è falso.

Teorema. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).*

Allora,

esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$f'(c) = 0$$

Aggiungere un'ipotesi di modo che il teorema diventi vero (e significativo).

(6) Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione. Quali delle seguenti affermazioni sono false?

(i) Se f è derivabile su (a, b), allora f è continua su (a, b).

(ii) Se f è continua su (a, b), allora f è derivabile su (a, b).

(iii) Se $c \in (a, b)$ è un punto di massimo o di minimo relativo per f e f è derivabile su (a, b), allora $f'(c) = 0$.

(iv) Se $c \in (a, b)$, f è derivabile su (a, b) e $f'(c) = 0$ per un punto $c \in (a, b)$, allora c è un punto di massimo o di minimo relativo per f.

[(ii) e (iv) sono false.]