Esempio di orale

22 febbraio 2003

Supponiamo che la domanda alla quale dobbiate rispondere sia

Derivate parziali, gradiente e differenziabilità di una funzione a valori reali.

Innanzitutto, decidete se considerare funzioni di due variabili o di n variabili (non mi formalizzo su questo punto). Supponiamo che decidiate di dire tutto quello che sapete dell'argomento in due variabili. Il vostro elaborato potrebbe assomigliare a quello che segue. (In corsivo ci sono alcuni commenti).

Def. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia (x_0, y_0) un punto in $\mathbb{R}^2$. La **derivata parziale rispetto a** x di f in (x_0, y_0) è, se esiste ed è reale,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Allo stesso modo, la **derivata parziale di** f rispettoa y in (x_0, y_0) è, se esiste ed è reale, il limite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(y, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Una funzione che ha derivate parziali rispetto a x e y in un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ si dice **parzialmente derivabile** in A.

Ovviamente, qualsiasi notazione voi utilizziate per le derivate parziali va bene: ne abbiamo viste cinque o sei. Il limite potreste anche scriverlo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

non cambia nulla.

Def. Siano f e (x_0, y_0) come sopra. Il **gradiente** di f in (x_0, y_0) è il vettore in $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Magari qualcuno di voi si ricorda del seguente fatto. In generale, una funzione f può ammettere derivate parziali su tutto $\mathbb{R}^2$, ma essere discontinua in qualche punto. Per esempio, la funzione f definita da

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

per $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, ha derivate parziali in ogni punto del piano (*a questo punto, calcolarle, anche in* $(0,0)$*, sarebbe buona cosa*), ma è discontinua in $(0,0)$ (*magari riuscite anche a mostrarlo*).

Teorema(sulla differenziabilità delle funzioni C^1). Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, f una funzione da A a $\mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$. Se f è parzialmente derivabile in A e se le funzioni $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in A, allora

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0)h + \partial_y f(x_0, y_0)k + o_{(h,k)\to(0,0)}(\sqrt{h^2 + k^2})$$

(*Anche qui, si poteva mettere la formulazione equivalente:*

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(x - x_0) + o_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$$

non cambia nulla).

Corollario. Se f, A e (x_0, y_0) sono come nelle ipotesi del teorema, allora la funzione f è continua in (x_0, y_0).

o**-piccolo.** La definizione di o-piccolo è la seguente (*definisco solo l'o-piccolo che ci interessa; alternativamente, uno può mettere la definizione generale*).

Una funzione $g(h,k)$ è **o-piccolo** di $\sqrt{h^2+k^2}$ al tendere di (h,k) a $(0,0)$ se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|g(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Questo teorema giustifica la seguente definizione.

Def. Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e f una funzione da A a $\mathbb{R}$.Diciamo che f è **di classe** C^1 **su** A se f è parzialmente derivabile in A e se le funzioni $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in A. In questo caso, scriviamo $f \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Una volta data questa risposta essenziale, il candidato può, volendo, sviluppare il tema a suo piacimento. Per esempio, può scrivere (se la sa) la dimostrazione del teorema di differenziabilità. Oppure, può iniziare ad affrontare il tema del differenziale e del piano tangente al grafico di f*, o la derivata direzionale, o qualche significato geometrico del gradiente...*