ALCUNI SUGGERIMENTI PER LA PROVA ORALE

Nicola Arcozzi

November 26, 2003

Analisi Matematica L-A

Abstract

Questa breve nota dovrebbe darvi alcune linee-guida per la preparazione della prova orale (non **tutte** le linee-guida, ovviamente).

1 Definizioni e teoremi.

Tutta la matematica può essere in linea di principio ridotta a *definizioni* e *teoremi* (e *assiomi*, ma noi non ci siamo soffermati su questo).

Una **definizione** è una frase che dichiara il significato di una espressione o di una parola fino a quel punto priva di significato matematico. Questo significato deve essere espresso con una frase contenente termini già definiti altrove.[1] Per esempio, consideriamo la definizione di *limite di una successione.*

Definizione. Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$ e sia $l \in \mathbb{R}$. La successione $\{a_n\}$ *tende a* l *per* n *che tende a* ∞ se e solo se, per ogni $\epsilon > 0$ abbiamo che

$$|a_n - l| < \epsilon \text{ definitivamente} \tag{1}$$

In questo caso scriviamo $a_n \to l$ o

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

e diciamo che l è il *limite* di a_n per $n \to \infty$. Diciamo che $\{a_n\}$ *è convergente in* $\mathbb{R}$ se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \to l$.

Soffermiamoci un attimo su questa definizione. Innanzitutto, le parole ed espressioni in essa definita sono quelle che ho scritto in carattere

[1] In questa maniera, penseranno alcuni, non c'è limite alla regressione: ogni definizione presuppone la definizione delle parole in essa contenuta. Infatti, alla base della teoria abbiamo messo alcuni oggetti che non abbiamo definito: i numeri (naturali, interi, razionali, reali, di cui abbiamo solo dato le proprietà, senza entrare nel merito di cosa essi siano), gli insiemi e la relazione di appartenenza, le funzioni (di cui abbiamo specificato le proprietà, senza dare una definizione vera e propria).

diverso (*italico*): $\{a_n\}$ tende a l (espressione che ha senso, per ora, solo se $\{a_n\}$ è una successione e l è un numero reale); limite di $\{a_n\}$; successione convergente. D'ora in poi, siamo liberi di usare queste espressioni (nel giusto contesto!).

Esercizio utile. Fate una lista completa delle definizioni che abbiamo visto durante il corso.

Notate anche che, nela prima parte della definizione, appare una sorta di *dichiarazione* degli oggetti di cui nella definizione si parla. Questi oggetti sono una successione di numeri reali $\{a_n\}$ e un numero reale l. Lo schema ideale di una definizione è il seguente

Siano A, B,... certi oggetti (già definiti). Diciamo che **(nuova frase o nome che riguarda A, B, C,...)** *se e solo se (frase riguardante A, B, C,... contenente nomi e espressioni già definite in precedenza).*

Esercizio. Dare la definizione di *numero pari.* [2]

Esercizio meno utile. Provate a dare una definizione di *specie animale.* [3]

Tornando alla definizione di limite e successione convergente, andiamo a vedere quali termini già definiti vi appaiano. Abbiamo la parola *successione*, il simbolo $\mathbb{R}$ (insieme dei *numeri reali*), simboli per il valore assoluto ($|\cdot|$) e la differenza ($-$), le espressioni *per ogni* e *esiste* (quantificatori: importantissimi, ci ritorneremo), l'avverbio *definitivamente.* Quest'ultimo termine è stato introdotto soprattutto per poter parlare di limiti di successioni. Se diamo la definizione di limite di una successione, occorre che diamo anche la definizione di questo termine, prima (come sarebbe rigoroso fare), o subito dopo (quasi a "completamento" della definizione di limite). Ancora meglio, possiamo spiegare cosa significhi l'espressione $|a_n - l| < \epsilon$ *definitivamente*:

Diciamo che $|a_n - l| < \epsilon$ *definitivamente* se e solo se esiste un numero reale R tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $n > R$, allora $|a_n - l| < \epsilon$.

Un errore abbastanza comune, e orribile, consiste nel dare una definizione contenente termini non definiti prima. Per esempio,

Definizione. Sia $\{a_n\}$ una successione convergente in $\mathbb{R}$ e sia $l \in \mathbb{R}$. La successione $\{a_n\}$ *tende a l per n che tende a ∞* se e solo se, per ogni $\epsilon > 0$ abbiamo che

$$|a_n - l| < \epsilon \text{ definitivamente} \tag{2}$$

[2] Ecco una definizione. Sia $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale. Diciamo che n è *pari* se esiste un numero $m \in \mathbb{N}$ tale che $n = 2m$.

[3] Proviamo.Due animali *appartengono alla stessa specie* se (1) hanno sesso diverso e, incrociandosi, possono avere prole a sua volta fertile o, (2) hanno lo stesso sesso e appartengono alla stessa specie di un terzo animale. Così ho definito l'espressione *appartenere alla stessa specie*. Adesso posso definire la specie in sè. Dato un animale A, la *specie di A* è l'insieme di tutti gli animali che appartengono alla stessa specie di A.

Chi di voi sa qualcosa sulle relazioni di equivalenza, può formulare diversamente queste due definizioni. Data la definizione, si capisce la varietà di opinioni riguardo al numero di specie di ominidi che si riscontra tra i paleoantropologi: il criterio di appartenenza alla stessa specie è inoperativo quando lo si applica a animali estinti.

Domanda: due specie diverse possono avere dei membri in comune?

L'errore, qui, sta nel fatto che introducendo gli oggetti di cui la definizione di *limite* tratta, abbiamo parlato di *successione convergente*, ma una successione è convergente se e solo se ha limite: non possiamo parlare di successioni convergenti *prima* di aver parlato di limite.

È **importantissimo** saper distinguere la natura dei diversi oggetti matematici. Nella definizione di limite, per esempio, abbiamo un *numero reale* (l) e una *successione di numeri reali* ($\{a_n\}$). La successione di numeri reali *non è* un numero reale, *né è* un *insieme* di numeri reali (per definizione, è una *funzione* da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$). [4]

Vediamo alcuni esempi dall'analisi. Un *limite* è sempre un numero reale o $\mp\infty$. La derivata di una funzione in un punto è un numero reale. La derivata di una funzione è una funzione, se non altrimenti specificato (la *funzione derivata*). Il dominio di una funzione è un insieme di numeri reali (in Analisi L-A, facendo eccezione per la definizione di derivata parziale). Gli oggetti di cui ci siamo occupati hanno la natura di: numeri naturali o reali, insiemi di numeri reali, successioni, funzioni da sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, insiemi di funzioni ($C((a,b))$, per esempio), sottoinsiemi del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ (il grafico di una funzione), equazioni o disequazioni in una o più variabili...

Esercizio utile. Per ogni enunciato di teorema o definizione, determinare la natura degli oggetti matematici che vi compaiono.

o-piccolo denota una relazione tra funzioni (o successioni, a seconda del contesto) e ha senso solo se si specifica un limite.

Definizione. Siano f e g due funzioni definite $(a,b)-\{x_0\}$, $x_0 \in (a,b)$. Diciamo che *g è o-piccolo di f* per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Scriviamo, in questo caso, $g(x) = o_{x\to x_0}(f(x))$.

Questa definizione contiene un errore. Quale?[5] Dare la definizione di *asintotico* ($\sim$). Di che tipo di oggetto si tratta?[6]

La natura degli oggetti matematici è strettamente legata alla fondamentale nozione di **uguaglianza**. Quando scriviamo $A = B$, intendiamo che A e B *sono la stessa cosa*.[7]

[4] Anche il linguaggio comune è pieno di oggetti di natura diversa. Lo studente X ha un numero di matricola n, ma non *è* il suo numero di matricola (lo studente appartiene all'insieme degli esseri umani, il suo numero di matricola a $\mathbb{N}$). Un modello automobilistico (che so, la Tucker) non è una automobile (una concreta Tucker). Potremmo definire un modello automobilistico come l'*insieme* delle automobili aventi quel modello (ci sono altre possibili definizioni, ovviamente). Un corso universitario non è l'insieme dei suoi studenti (per due ragioni: 1) corsi diversi tra loro possono avere lo stesso insieme di studenti a seguirlo; 2) a volte succede -non qui a Bologna- che un corso venga seguito ufficialmente da zero studenti, ma che non venga comunque soppresso: esso rimane un corso).

[5] Per non avere problemi col denominatore, nelle ipotesi avremmo dovuto specificare che esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(x) \neq 0$ per $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$.

[6] È una relazione tra funzioni o successioni, a seconda del contesto.

[7] Alcuni esempi dal linguaggio comune. Due gemelli identici non sono uguali, poichè sono persone diverse. Quando dico che io sono Nicola Arcozzi, non dico "io=Nicola Ar-

In particolare, non scriveremo **mai** che $A = B$ quando A e B sono oggetti di natura diversa: un numero non è uguale a un insieme di numeri, una funzione non è uguale a un numero, un'insieme non è uguale a una successione, una coppia ordinata di numeri reali non è uguale a un numero reale. Per esempio,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{x + o_{x\to 0}(x)}{x} = 1$$

contiene due errori gravissimi. La prima uguaglianza è tra un numero (il limite) e una funzione; la seconda uguaglianza è tra una funzione e un numero. (Gli orrori si elidono nei loro effetti, poichè il limite in questione è proprio 1, ma rimangono orrori).

In generale, un **enunciato matematico** è una frase contenente termini già definiti, di cui è possibile dire, in linea di principio, se sia vero o falso. Gli enunciati matematici veri sono detti *teoremi.* [8]

I seguenti sono enunciati.

(1) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia f derivabile in (a, b). Allora, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$$

(2) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b). Allora, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$$

(3) Sia $n \in \mathbb{N}$ pari. Allora, esistono due numeri primi p e q in $\mathbb{N}$ tali per cui $p + q = n$.

Sappiamo che (1) è vero (Teorema di Lagrange) e che (2) è falso (perchè?). (3) è chiaramente un enunciato: o ogni n pari può essere scomposto come somma di primi, o possiamo trovare n pari per cui tale scomposizione non esiste. Al momento, nessuno sa se (3) sia vero o falso (congettura di Goldbach, 1742).

Tutti i teoremi possono essere scritti nella forma $Ipotesi \implies Tesi$, *Ipotesi implica Tesi.* Tutte le volte che ci troviamo di fronte a un teorema, quindi, la prima cosa che dobbiamo chiederci è: quali sono le ipotesi? Qual'è la tesi?

Esercizio. Scrivere ogni teorema visto nel corso isolando ipotesi e tesi.

Affinchè un enunciato della forma: *per ogni x, succede la tal cosa*, sia falso, basta trovare un esempio contrario. Per esempio,

cozzi", poichè "Nicola Arcozzi" è una coppia ordinata (Nome, Cognome), mentre io sono una persona. In realtà, c'è una funzione dall'insieme delle persone a quello delle coppie nome-cognome (i casi di omonimia insegnano che la funzione non è iniettiva).

[8] A volte, un teorema è chiamato *lemma* (se è strumentale alla dimostrazione di un altro teorema e non ha troppo valore in sè), *corollario* (se segue immediatamente da un altro teorema), *proposizione* o *proprietà* (se non è un pilastro della teoria). Non esiste una distinzione rigorosa tra questi termini, il cui uso serve solo a rendere più leggibile un discorso matematico.

tutti i numeri pari sono divisibili per 4

e falso, in quanto esistono numeri pari che non sono divisibili per quattro.

Alcune frasi non sono enunciati. Per esempio,

la funzione f è continua.

I

nfatti, questa frase non è, di per sè, vera o falsa. Dipende da f. L'enunciato che segue è vero

esiste una funzione f che è continua

mentre questo altro è falso

ogni funzione f è continua.

Affinchè un enunciato del tipo *esiste x con la tal proprietà* sia falso, occorre mostrare che la proprietà è falsa per *tutti* i valori di x.

Questi esempi ci introducono a un'importante caratteristica dei teoremi (degli enunciati matematici in genere). Ogni variabile x che vi compare deve essere *quantificata*, cioè dobbiamo sapere se la frase dell'enunciato si applica a *ogni* valore di x (e allora scriviamo *per ogni* x o $\forall x$) o se vogliamo che *esista* un valore di x per cui la frase è vera (e allora, scriviamo *esiste* x $\exists x$). [9] A volte x è un *dato* preso in un certo insieme. Va inteso, in questo caso, che l'enunciato deve valere *per ogni* x nell'insieme dei dati. Facciamo un esempio.

Teorema (formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange, caso $n = 1$). *Sia $f \in C^2((a,b))$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora, per ogni $x \in (a,b)$, esiste c tale che $|c - x_0| < |x - x_0|$ e $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2$.*

I dati sono $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ e $f \in C^2((a,b))$ (anche f è una variabile, che indica un elemento generico nella classe $C^2((a,b))$!). Di x_0 sappiamo che $x_0 \in (a,b)$. Le altre variabili che appaiono sono $x, c \in (a,b)$. La prima è quantificata da $\forall$, la seconda da $\exists$. Il teorema può essere riscritto in maniera più strutturata.

Teorema (formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange, caso $n = 1$). Ipotesi. *Sia $f \in C^2((a,b))$ e sia $x_0 \in (a,b)$.*

Tesi $\forall x \in (a,b)$ $\exists c$ *tale che* $|c - x_0| < |x - x_0|$ *e* $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2$.

Tenendo conto di quanto detto sui dati (cioè, che si sottintende il quantificatore $\forall$), possiamo anche scrivere

Teorema (formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange, caso $n = 1$). Ipotesi. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b, \forall f \in C^2((a,b)),\ \forall x_0 \in (a,b)$.

Tesi $\forall x \in (a,b)$ $\exists c$ *tale che* $|c - x_0| < |x - x_0|$ *e* $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2$.

Torniamo alla divisione dell'enunciato in ipotesi e tesi. A volte, l'enunciato si presenta nella forma

[9] $\forall$ e $\exists$ sono detti *quantificatori.* $\forall$ è il *quantificatore universale*, mentre $\exists$ è il *quantificatore esistenziale.*

Se valgono le ipotesi A, B,...; allora vale la tesi C

.

Per esempio,

Teorema di Rolle. Ipotesi. Se (A) $f \in C([a,b])$, (B) f è derivabile in (a,b), (C) $f(a) = f(b)$; allora **Tesi:** $\exists c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

A volte, la tesi è scritta in maniera più complessa. Per esempio, parlando di monotonia e derivate,

Teorema. Ipotesi. Sia f derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora,
Tesi: f è crescente in I se e solo se $\forall x \in I$ si ha che $f'(x) \geq 0$.

(Si suppone che tutti sappiano la definizione di funzione crescente!). Questo teorema è del tutto equivalente (cioè, dice la stessa cosa) ai due teoremi che seguono.

Teorema 1. Ipotesi. Sia f derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e f sia crescente in I. Allora,
Tesi: $\forall x \in I$ si ha che $f'(x) \geq 0$.

Teorema. Ipotesi. Sia f derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e si abbia che $\forall x \in I$ $f'(x) \geq 0$. Allora,
Tesi: f è crescente in I.

A volte, i teoremi sono presentati nella forma: *condizione necessaria affinchè valga A è che valga B*, o *condizione sufficiente affinchè valga A è che valga B*. Nel primo caso, si intende, semplicemente, che $A \implies B$. Nel secondo, che $B \implies A$. Ecco alcuni esempi presi dal programma svolto in Analisi L-A. Scriveteli con ipotesi e tesi.

Condizione sufficiente affinchè una successione $\{a_n\}$ a valori in $\mathbb{R}$ ammetta limite in $\mathbb{R}^*$ è che $\{a_n\}$ sia monotona. Chiaramente, la condizione non è affatto necessaria (perchè?)[10].

Condizione necessaria affinchè una successione $\{a_n\}$ a valori in $\mathbb{R}$ ammetta limite in $\mathbb{R}$ è che $\{a_n\}$ sia limitata. La condizione non è affatto sufficiente (perchè?)[11].

Sia $\{a_n\}$ una successione crescente in $\mathbb{R}$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\{a_n\}$ converga in $\mathbb{R}$ è che $\{a_n\}$ sia limitata superiormente.

Cosa succede quando, in una frase matematica, non tutte le variabili sono quantificate? Questa frase diventa un'**equazione** (in un senso molto generale). Per esempio, la frase

$$x + 1 = 0$$

non è, di per sè, vera, nè falsa, poichè la variabile x non è quantificata (sarà vera per alcuni x, falsa per altri). Un valore di x per cui la frase è vera si dice *soluzione* dell'equazione. Invece, i seguenti sono enunciati.

$$\forall x \; x + 1 = 0$$

[10] Trovate una successione convergente che non sia monotona.
[11] Trovate una successione limitata che non converga.

(falso) e

$$\exists x \; x + 1 = 0$$

(vero).

2 Suggerimenti pratici per la prova orale.

Ovviamente, ci sono infinite maniere corrette per presentare un argomento matematico (e altrettante scorrette!). Questo vale anche per quella particolare presentazione che è costituita dalla prova orale dell'esame di Analisi L-A. Vi sono, a questo ultimo proposito, alcuni sugerimenti che dovreste considerare come regole.

(1) Tutti i commenti intuitivi, le motivazioni, gli esempi vanno messi in fondo. La prima parte del discorso deve essere fatta di definizioni, teoremi, eventualmente dimostrazioni di teoremi.

(2) Se dovete parlare di un oggetto, iniziate con la sua definizione.

(3) Definizioni e teoremi vanno scritti in maniera formale (a partire dal fatto che si deve sapere dove inizia e finisce la definizione o l'enunciato di un teorema). Negli enunciati dei teoremi deve essere chiaro quali sono le ipotesi e quali e tesi. Nelle definizioni deve essere chiaro ciò che si sta definendo e la maniera in cui lo si definisce (vedi §1).

(4) Scrivete (se le domande vi vengono fatte per iscritto) o dite tutto quello che sapete al riguardo, seguendo l'ordine logico e un ordine di importanza. Ciò che non scrivete, ai fini della valutazione, è come se non lo sapeste.

(5) Evitate le "sbrodolature" (commenti lunghissimi, espressioni gergali o metaforiche...). Fate attenzione al linguaggio! In linea di principio, tutte le parole che usate dovrebbero avere un senso matematico (di cui dovete sapere la definizione). Questa nota è essa stessa un esempio di scrittura "sbrodolata" (ciò è dovuto al fatto si prefigge degli scopi diversi da quelli di una presentazione d'esame).

Supponiamo che dobbiate parlare di *derivate e monotonia*. Un possibile discorso su questo tema potrebbe essere il seguente.

Definizione (di funzione crescente). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. f è *crescente* su A se e solo se, $\forall x, y \in A$, $x < y \implies f(x) \leq f(y)$.

A questo punto, potreste far seguire la definizione di funzione decrescente, strettamente crescente o decrescente, eccetera. Data la definizione principale, si può iniziare a enunciare i teoremi più importanti che abbiamo visto al riguardo. Per esempio, quello riportato nel paragrafo precedente,

Teorema. Ipotesi. Sia f derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora,
Tesi: f è crescente in I se e solo se $\forall x \in I$ si ha che $f'(x) \geq 0$.

Questo teorema può anche essere formulato in maniera diversa. *Sia f derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora, condizione necessaria e* *sufficiente affinchè f sia crescente in I è che $\forall x \in I$ si ha che $f'(x) \geq 0$.*

Si può anche enunciare il caso delle funzioni decrescenti. A questo potremmo far seguire qualcosa sulle funzioni con derivata strettamente positiva (o negativa).

Teorema. Ipotesi. Sia f derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Sia $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$. Allora,

Tesi: f è strettamente crescente in I.

Possiamo dire diversamente. *Sia f derivabile nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora, condizione sufficiente affinchè f sia strettamente crescente in I è che $\forall x \in I$ si abbia che $f'(x) > 0$.*

Confrontando i due teoremi, ci si può chiedere se questo ultimo teorema possa essere invertito. Abbiamo visto un esempio che mostra come ciò non sia vero, e questo è il punto giusto per darlo.

Esempio. Esistono funzioni f derivabili su $\mathbb{R}$, strettamente crescenti, tali che $\exists x : \ f'(x) = 0$. Per esempio, $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$. La condizione è sufficiente, come abbiamo visto, ma non necessaria.

Se sapete le dimostrazioni di qualcuno dei teoremi, potete scriverle adesso. Se vi vengono in mente applicazioni, potete scrivere anche queste.