ORALI 2006/07

Nicola Arcozzi

1 A risposta multipla

(1) Siano $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ numeri reali. Quali delle seguenti affermazioni é certamente vera?

(i) $b < \sqrt{a} \implies b^2 < a$.

(ii) $b^2 < a \implies b < \sqrt{a}$.

(iii) $b < \sqrt{a} \implies b < 0$.

(iv) $b^2 > a \implies b > \sqrt{a}$.

(2) Quale delle seguenti affermazioni vale per ogni $x \in \mathbb{R}$?

(i) $\frac{1}{x} < x \iff x > 1$.

(ii) $\frac{1}{x} < x \iff x < -1$ o $x > 1$.

(iii) $-1 < x < 0 \implies \frac{1}{x} < x$.

(iv) $x > 0 \implies \frac{1}{x} < x$.

(3) Quale delle seguenti affermazioni vale per ogni $x \in \mathbb{R}$?

(i) $\sqrt[4]{x^2} < -x \iff x < -1$.

(ii) La disuguaglianza $\sqrt[4]{x^2} < -x$ non é mai verificata.

(iii) $\sqrt[4]{x^2} < -x \iff x^2 < x^4$.

(iv) $\sqrt[4]{x^2} < -x \iff \sqrt{|x|} < |x|$.

(4) Siano $v_1 = (a, 2),\ v_2 = (3, 4a) \in \mathbb{R}^2$. Trovare tutti i valori di a per cui v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti.

(5) Quale delle seguenti affermazioni vale per ogni $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$?

(i) $x < y \implies \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

(ii) Se x e y hanno segno diverso, allora $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \iff x < y$.

(iii) $x > y \implies \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

(iv) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} \implies x > y$.

(6) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni

$$f(x) = 2^x,\ g(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Quale delle seguenti identitá é vera per ogni $x \in \mathbb{R}$?

(i) $f \circ g(x) = \frac{1}{1+2^{2x}}$.

(ii) $g \circ f(x) = 2^{\frac{1}{1+x^2}}$.

(iii) $g \circ f(x) = \frac{1}{1+2^{x^2}}$.

(iv) $g \circ f(x) = \frac{1}{1+2^{2x}}$.

(7) Sia $a > 1$ e sia . Se

$$L = a^{\log_a\left(a^2\right)} + a^{\log_a\left(a^3\right)} \text{ e } M = a^{\log_a\left(a^2\right)} a^{\log_a\left(a^3\right)},$$

allora

(i) $L = 6$.

(ii) $L = 5$.

(iii) $M = 6$.

(iv) M =5.

(8) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Quale delle seguenti identitá é vera per ogni $x \in \mathbb{R}$?

(i) $f \circ f(x) = \frac{1}{1+2x}$.

(ii) $f \circ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(iii) $f \circ f(x) = \frac{1+x}{2+x}$.

(iv) $f \circ f(x) = \frac{2+x}{1+x}$.

(9) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
Sia ora $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cosídefinita:

$$h(x) = x \cdot f(x^2 + 1).$$

Calcolare $h'(2)$, sapendo che $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(5) = 5$, $f'(1) = \pi$, $f'(2) = e$, $f'(5) = \log 2$.

(10) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 \text{ se } x < a, \\ 1 \text{ se } x \geq a. \end{cases}$$

Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione f é continua?

(i) $a = 0$.

(ii) $a = 1$.

(iii) $a = 0, 1$.

(iv) Per ogni valore di a.

(11) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
Sia ora $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cosídefinita:

$$h(x) = f(2x \cdot f(3x)).$$

Calcolare $h'(0)$, sapendo che $f(0) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(0) = \pi$, $f'(2) = e$, $f'(3) = \log 2$.

(i) $h'(0) = 2\pi$.

(ii) $h'(0) = 4\pi$.

(iii) $h'(0) = 6\log^2 2$.

(iv) $h'(0) = 2e$.

(12) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni

$$f(x) = x^2,\ g(x) = \frac{2}{x} + 1.$$

Quale delle seguenti identitá é vera per ogni $x \in \mathbb{R}$?

(i) $g \circ f(x) = \frac{2+x^2}{x^2}$.

(ii) $g \circ f(x) = \frac{4+4x+x^2}{x^2}$.

(iii) $g \circ f(x) = 2x^2 + 1$.

(iv) $g \circ f(x) = \frac{1}{2x^2+1}$.

(13) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
Sia ora $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cosídefinita:

$$h(x) = f(x + f(x)).$$

Calcolare $h'(1)$, sapendo che $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = \pi$, $f'(2) = e$, $f'(3) = \log 2$.

(i) $h'(1) = \pi \log 2$.

(ii) $h'(1) = (1 + \pi) \log 2$.

(iii) $h'(1) = e \log 2$.

(iv) $h'(1) = e\pi$.

2 Definizioni e teoremi

Definizione di limite di una funzione.

Successioni e limiti di successioni.

Definizione di continuitá in punto di una funzione.

Definizione di massimo di una funzione, di punto di massimo per una funzione e teorema di Weierstrass.

Definizione di funzione continua e teorema degli zeri.

Definizione di derivata di una funzione in un punto, relazione tra derivabilitá e continuitá di una funzione.

Definizione di funzione crescente e teoremi che legano la crescenza di una funzione al segno della sua derivata prima.

Definizione di composizione di due funzioni e teorema sulla derivata di una composizione.

Definizione di punto di massimo reativo per una funzione e teorema di Fermat.

Teoremi di Lagrange e Rolle.

Formula di Taylor al II ordine centrata in $x = 0$.

Teorema di de l'Hospital.

Definizione di derivata seconda e di funzione convessa.

Definizione di spazio vettoriale.

Definizione di vettori linearmente indipendenti e di base di uno spazio vettoriale.

Definizione e proprietá di prodotto scalare tra vettori.

3 Equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione
$$x^2 + 2 = 0.$$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$x^2 + x + 2 = 0.$$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$x^2 + 1 = 0.$$