# Prova complessiva scritta di Analisi Matematica I
# Ingegneria Edile-Architettura, 9 settembre 2011

**Nome**...........................................**Cognome**............................................... **Matricola**................

**(1)** [12 pt] Studiare

$$f(x) = xe^{-\frac{3}{|x-1|}}$$

- Trovare il dominio di $f$, il sottoinsieme del dominio su cui $f$ è continua e i limiti agli estremi degli intervalli su cui $f$ è continua.

- Trovare i punti in cui la funzione è derivabile e calcolarne la derivata.

- Trovare gli intervalli su cui $f$ è, rispettivamente, crescente o decrescente.

- Tracciare un grafico qualitativo di $f$.

**(2)** [4 pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+3x+9x^2)^3 - e^{9x}}{1-\cos(2x)}$$

**(3)** [4 pt.] Calcolare $f'(1)$, dove

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$$

**(4)** [4 pt] Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quale delle seguenti affermazioni *non* è necessariamente vera?

- Se $f$ è crescente e $g$ è crescente, allora $g \circ f$ è crescente.
- Se $f$ ha un punto di massimo e $g$ è crescente, allora $g \circ f$ ha un punto di massimo.
- Se $f$ è decrescente e $g$ è decrescente, allora $g \circ f$ è decrescente.
- Se $f$ ha un punto di massimo e $g$ è decrescente, allora $g \circ f$ ha un punto di minimo.

**(5)** [3 pt] Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 + 3iz^2 - 2 = 0$$

**(6)** [5 pt] Calcolare

$$\int_0^3 \frac{x\sqrt{\log(x^2+9)}}{x^2+9} dx$$

**(6)** [3 pt] Calcolare il limite di successione:

$$\lim_{n\to\infty} \left[ \pi \frac{9^n}{3^{n^2}} + e \frac{9^n}{3^{2n}} \right]$$

9/9/2011 AM I

(1) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{3}{|x-1|}}$

Dominio$(f)$ = Dominio$(f')$ = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f$ è continua sul suo dominio.

$$f'(x) = e^{-\frac{3}{|x-1|^2}} \cdot \left\{ 1 + x \cdot 3 \cdot \frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{|x-1|^2} \right\}$$

$$= |x-1|^{-2} \cdot e^{-\frac{3}{|x-1|^2}} \cdot \left[ (x-1)^2 + 3x \cdot \operatorname{sgn}(x-1) \right]$$

$$= |x-1|^{-2} \cdot e^{-3/|x-1|^2} \cdot \begin{cases} (x-1)^2 + 3x & \text{se } x > 1 \\ (x-1)^2 - 3x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 + 3x \geq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 1 \\ (x-1)^2 - 3x \geq 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ mai $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x^2 - 5x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

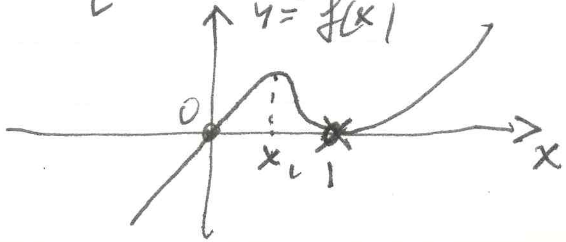
$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x < 1 \\ \underbrace{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}_{x_1} x < \underbrace{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}_{x_2} \end{cases}$$

0 $\quad x_1 \quad$ 1 $\quad x_2$

$f$ cresce in $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right]$ e in $(1, +\infty)$

$f$ decresce in $\left[\frac{5-\sqrt{21}}{2}, 1\right)$




(3) Per il T.F.C.I., ho che $f'(x) = e^{x^2}$, quindi che $f'(1) = e$

(2) $(1+3x+9x^2)^3 - e^{9x} = 1 + 3 \cdot (3x+9x^2) + 3(3x+9x^2)^2 + o_{x \to 0}(x^2) - \left[1 + 9x + \frac{(9x)^2}{2} + o_{x \to 0}(x^2)\right] =$

$= 1 + 9x + \cancel{27}x^2 + 27x^2 + o_{x\to 0}(x^2) - 1 - 9x - \frac{81}{2}x^2$

$= x^2 \cdot 27\left(1 + 1 - \frac{3}{2}\right) + o_{x\to 0}(x^2) = \frac{27}{2}x^2 + o_{x \to 0}(x^2)$

$$\Rightarrow \frac{(1+3x+9x^2)^3 - e^{9x}}{1 - \cos(2x)} = \frac{27/2\, x^2 + o(x^2)}{1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)}$$

$$= \frac{27/2\, x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \frac{27/2 + o(1)}{2 + o(1)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{27}{4}$$

Il limite è $27/4$.

(4) "$f$ decresce e $g$ decresce $\Rightarrow g \circ f$ decresce" è generalmente falsa.

$\forall x \leq y$ in $\mathbb{R}$, $f(x) \geq f(y)$ (perché $f$ decresce)

$\Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) \leq g(f(y)) = g \circ f(y)$

(perché $g$ decresce). Cioè, $g \circ f$ cresce.

Allo stesso modo verifico che

"$f$ cresce e $g$ cresce $\Rightarrow g \circ f$ cresce" è vera.

Se $x_0$ è di MAX. per $f$, allora $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \leq f(x_0)$, dunque $\forall x \in \mathbb{R}$: $g \circ f(x) = g(f(x)) \geq g(f(x_0)) = g \circ f(x_0)$ se $g$ è crescente. Quindi $g \circ f$ ha p.to di MAX. $x_0$

La seconda frase è vera, cioè Anche la IV.

(5) $z^4 + 3iz^2 - 2 = 0$ Pongo $z^2 = w$

$w^2 + 3iw - 2 = 0$ $\Delta = (3i)^2 - 4\cdot(-2) = -1 = i^2$

$w = \frac{-3i \pm i}{2} = -2i, -i$

$z^2 = -2i = 2\cdot e^{-i\pi/2} \iff z = \pm\sqrt{2}\cdot e^{-i\pi/4}$

$= \pm\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \pm(1-i)$

$z^2 = -i = e^{-i\pi/2} \iff z = \pm e^{-i\pi/4} = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

Sol. $\pm(1-i)$; $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

(6) Pongo $y = \log(x^2+9)$ $dy = \frac{dx}{x^2+9}\, 2x$

$x = 0 \Rightarrow y = \log 9$

$x = 3 \Rightarrow y = \log 18$

$$\int_0^3 \frac{x\sqrt{\log(x^2+9)}}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\log 9}^{\log 18}\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^{3/2}}{3/2}\right)_{\log 9}^{\log 18}$$

$= \frac{1}{3}\left[(\log 18)^{3/2} - (\log 9)^{3/2}\right].$

(7) $\pi\cdot\frac{9^n}{3^{n^2}} + e\cdot\frac{9^n}{3^{2n}} = \pi\cdot 3^{2n-n^2} + e\cdot 3^{2n-2n}$

$= \pi\cdot 3^{-n^2(1-2/n)} + e \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\cdot 0 + e = e.$