Capitolo 1

~~Matematica~~ Insiemi e alcuni fatti logici

Insiemi (notazione).

Un insieme A è caratterizzato degli elementi a che appartengono ad A:

$$a \in A \quad (\text{leggi: "}a \text{ appartiene ad } A\text{"})$$

Esempio. Se A è l'insieme dei numeri interi positivi pari,

$$n \in A \iff n \text{ è un intero positivo e } n \text{ è pari.}$$

Esempio. $A = \{-2, 0, 3\}$ è l'insieme avente come elementi -2, 0 e 3.

$$\{-2, 0, 3\} = \{-2, 3, 0\} = \{3, -2, 0\} = \ldots$$

Possiamo formare l'insieme degli elementi aventi una certa proprietà.

Esempio. Le soluzioni razionali dell'equazione

$$(2x-1) \cdot x \cdot (x+1)^2 = 0$$

~~sono~~ formano l'insieme

$$S = \{x : x \text{ è un numero razionale e } (2x-1) \cdot x \cdot (x+1)^2 = 0\}$$
$$= \{1/2, 0, -1\},$$

che ha tre elementi.

L'insieme vuoto $\emptyset$ è l'insieme che non contiene elementi.

Quantificatori.

"per ogni" si abbrevia in $\forall$

"esiste" si abbrevia in $\exists$

Siano A, B insiemi.

$A = B$ se e solo se $(\forall x : x \in A$ se e solo se $x \in B)$

A e B sono lo stesso insieme se e solo se hanno gli stessi elementi.

Una frase matematica spesso contiene delle variabili (indicate da lettere). Della frase possiamo dire se sia vera o falsa solo quando tutte le variabili che contiene sono "quantificate".

Esempio. Consideriamo le frasi

F_1 "$\cancel{x}$ è razionale e $2x-1=0$"
F_2 "$\exists x$: x è razionale e $2x-1=0$"
F_3 "$\forall x$: se x è razionale, allora $2x-1=0$"
F_4 "$2x-1=0$"

- In F_1 la variabile x non è quantificata. F_1 non è di per sé vera, né falsa: la F_1 è una frase che dipende dal valore di x, $F_1 = F_1(x)$.
Se $x=0$, F_1 è falsa.
Se $x=1/2$, F_1 è vera.
Hanno una forma simile a F_1 le equazioni, le disequazioni e altre importanti tipologie di frasi matematiche.

Schema: $\xrightarrow[\text{input}]{x} \boxed{F_1(x)} \xrightarrow[\text{output}]{\text{Vero o Falso}}$

Il numero razionale $\cancel{x}$ è soluzione di $F_1(x)$ se e solo se $F_1(\cancel{x})$ è una frase vera.

- F_2 è una frase vera. Infatti esiste un razionale x $(x=1/2)$:
$2 \cdot x - 1 = 0$.

- F_3 è una frase falsa. Non è vero che per ogni x razionale $2x-1=0$. ~~Infatti~~ Per esempio, se $x=0$ si ha
$2 \cdot 0 - 1 = -1 \neq 0$.

- F_4 è simile a F_1, ma per le esigenze della matematica è troppo generica, in quanto non viene specificato a priori un insieme su cui la variabile x può variare.
Di regola in matematica e nelle sue applicazioni si dichiara sempre l'insieme di valori che una variabile può assumere.

$F_5(x)$ "x è intero e $2x-1=0$"

- F_5, interpretata come equazione, non ha soluzioni ($x=1/2$ non è intero).

Osservazione: l'ordine dei quantificatori è importante.

Esempio.

$\mathcal{F}_1$ "Ogni porta ha una chiave che la apre."

$\mathcal{F}_2$ "Esiste una chiave che apre ogni porta."

La frase $\mathcal{F}_1$ è molto diversa dalla frase $\mathcal{F}_2$ (che assicura l'esistenza di un passe-partout!).

$P = \{x : x \text{ è una porta dell'edificio}\}$

$G = \{y : y \text{ è una chiave in portineria}\}$

$\mathcal{F}_1$: "$\forall x \in P\ \exists y \in G : y$ apre x"

$\mathcal{F}_2$ "$\exists y \in G\ \forall x \in P : y$ apre x"

Esempio. Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali.

$\mathcal{F}_1$: $\forall b \in \mathbb{Q}\ \exists x \in \mathbb{Q} : 3x = b$ (Vera)

$\mathcal{F}_2$: $\exists x \in \mathbb{Q}\ \forall b \in \mathbb{Q} : 3x = b$ (Falsa)

NOTAZIONE. Usiamo anche $\exists!$ per indicare "esiste ed è unico": $\exists! x \in A : \mathcal{F}(x)$ significa $\exists x \in A : [\mathcal{F}(x)$ e $(\forall y \in A : \mathcal{F}(y) \Rightarrow y = x)]$.

Esempio. L'insieme dei numeri interi positivi pari può essere descritto come

$A = \{n : n \text{ è un numero intero positivo e } \exists m \text{ intero} : n = 2 \cdot m\}$.

Connettivi logici. Date due frasi matematiche $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ possiamo costruirne una terza utilizzando delle congiunzioni. Si usano di norma le seguenti:

- non $\mathcal{F}_1$ (non)
- $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ (e)
- $\mathcal{F}_1$ o $\mathcal{F}_2$ (o)
- se $\mathcal{F}_1$ allora $\mathcal{F}_2$ (se … allora …)
- $\mathcal{F}_1$ se e solo se $\mathcal{F}_2$ (… se e solo se …)

Abbreviazioni utili:

$\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$ per "se $\mathcal{F}_1$, allora $\mathcal{F}_2$"

$\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$ per "$\mathcal{F}_1$ se e solo se $\mathcal{F}_2$"

Non useremo altre abbreviazioni.

- "$\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$" è vera se e solo se <u>sia</u> $\mathcal{F}_1$ <u>che</u> $\mathcal{F}_2$ sono vere.

<u>ESEMPIO</u>. "Parigi è in Francia <u>e</u> $2+2=5$" è falsa.

- "$\mathcal{F}_1$ o $\mathcal{F}_2$" è vera se <u>almeno uno</u> tra $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ è vera.

<u>ESEMPIO</u>. La frase dell'esempio che precede diventa vera se sostituiamo <u>e</u> con <u>o</u>.

<u>ESEMPIO</u>. "$2+2=4$ o $\exists x \in \mathbb{Q}: x^2=4$" è vera.

<u>ESEMPIO</u>. Siano $x, y \in \mathbb{Q}$. Definiamo: "$x \leq y$" se e solo se "$x < y$ o $x = y$".

Allora "$1 \leq 2$" è vera
"$3 \leq 3$" è vera
"$4 \leq 0$" è falsa
"$\forall x \in \mathbb{Q}: x \leq x$" è vera

<u>NOTA</u>. Usiamo <u>o</u> come il latino <u>vel</u>, non come il latino <u>aut</u>. Nel linguaggio comune, <u>o</u> ha

di volta in volta l'uno o l'altro significato.

- "non $\mathcal{F}_1$" è vera se e solo se $\mathcal{F}_1$ è falsa.

<u>ESEMPIO</u>. I pitagorici scoprirono che "$\exists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 2$" è falsa; cioè che "non $\exists x \in \mathbb{Q}: x^2=2$" è vera.

Due frasi $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ le cui variabili sono quantificate sono <u>logicamente equivalenti</u> se sono entrambe vere o entrambe false. Lo scrivo: "$\mathcal{F}_1$" $\Leftrightarrow$ "$\mathcal{F}_2$"
Se $\mathcal{F}_1(x)$ e $\mathcal{F}_2(x)$ dipendono da una variabile non quantificata x, $\mathcal{F}_1(x)$ e $\mathcal{F}_2(x)$ sono <u>logicamente equivalenti</u> se, per ogni valore $x=\alpha$, $\mathcal{F}_1(\alpha)$ è logicamente equivalente a $\mathcal{F}_2(\alpha)$.

<u>Esempio</u>. $\mathcal{F}_1$: "$1+1=2$" è logicamente equivalente a $\mathcal{F}_2$: "Roma è in Italia"

<u>Esempio</u>. $\mathcal{F}_1$: "$2x+3>0$ e $x \in \mathbb{Q}$" è log. equiv. a $\mathcal{F}_2$: "$x > -3/2$ e $x \in \mathbb{Q}$".

Negazione e quantificatori.
Siano A un insieme e $\mathcal{F}(x)$ una frase con le variabili $x \in A$ non quantificate.

- "non$\left(\forall x \in A : \mathcal{F}(x)\right)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists x \in A$: non $\mathcal{F}(x)$"
- "non$\left(\exists x \in A : \mathcal{F}(x)\right)$" $\Leftrightarrow$ "$\forall x \in A$: non $\mathcal{F}(x)$"

Esempi (classici):

- "non ogni uomo è mortale" se e solo se "esiste un uomo immortale"
- "non esiste un uomo mortale" se e solo se "ogni uomo è immortale".

- negare che $\mathcal{F}(x)$ valga per ogni x significa trovare almeno un x per cui $\mathcal{F}(x)$ non vale.
- negare che $\mathcal{F}(x)$ valga per almeno un x significa mostrare che $\mathcal{F}(x)$ non vale per nessun x.

Esempi. "$\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q}: y \cdot x = 1$" è falsa: esiste infatti $x \in \mathbb{Q}$: non $\exists y \in \mathbb{Q}: y \cdot x = 1$. Basta prendere $x = 0$: non $\exists y \in \mathbb{Q}: y \cdot 0 = 1$

Oss. Usando • e •• in successione:

non$\left(\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q} : y \cdot x = 1\right)$

se e solo se

$\exists x \in \mathbb{Q}$: non$\left(\exists y \in \mathbb{Q} : y \cdot x = 1\right)$

se e solo se

$\exists x \in \mathbb{Q} : \forall y \in \mathbb{Q} :$ non$(y \cdot x = 1)$

Notazione: "non$(a = b)$" si scrive "$a \neq b$"

Negazione e connettivi - 1.

- "non$\left(\mathcal{F}_1 \text{ e } \mathcal{F}_2\right)$" $\Leftrightarrow$ "(non $\mathcal{F}_1$) o (non $\mathcal{F}_2$)"
- "non$\left(\mathcal{F}_1 \text{ o } \mathcal{F}_2\right)$" $\Leftrightarrow$ "(non $\mathcal{F}_1$) e (non $\mathcal{F}_2$)"

Esempi.
- "Juha non è biondo e finlandese" equivale a "Juha non è biondo, o non è finlandese".
- "n non è (dispari o divisibile per 3)" equivale a "n è pari e non è divisibile per 3".

- Siano F_1 e F_2 delle frasi.
La frase "$F_1 \Rightarrow F_2$" è, in matematica, equivalente a
"F_2 o (non F_1)".

Esempi (1) "$\forall n$ intero:
n è divisibile per 4 $\Rightarrow$ n è divisibile per 2".
Infatti, o n è ~~dis~~pari ("~~non~~ F_2") oppure (essendo dispari) non è divisibile per 4 ("non F_1").

In questo esempio si vede un nesso tra F_1 e F_2. L'esempio che segue sembra paradossale!

(2) "Se $1=0$, allora Bologna è capitale della Cina" è vera.
Infatti, F_1 = "$1=0$" è falsa, quindi "non F_1" è vera, dunque "F_2 o (non F_1)" è vera, dunque lo è "$F_1 \Rightarrow F_2$".

(3) "Se $1=0$, allora Bologna non è capitale della Cina" è altrettanto vera, per gli stessi motivi di (2).

- Siano F_1 e F_2 delle frasi.
La frase "$F_1 \Leftrightarrow F_2$" è equivalente a "($F_1 \Rightarrow F_2$) e ($F_2 \Rightarrow F_1$)".

Osservazione. Dalle verità o falsità di F_1 e F_2 possiamo dedurre la verità o falsità di "non F_1", "F_1 e F_2", "F_1 o F_2", "$F_1 \Rightarrow F_2$", "$F_1 \Leftrightarrow F_2$".

F_1	F_2	non F_1	F_1 e F_2	F_1 o F_2	$F_1 \Rightarrow F_2$	$F_1 \Leftrightarrow F_2$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Annotazione logico-filosofica 1. Stiamo qui cercando di concordare un linguaggio e di richiamare alcune nozioni intuitive di logica, non di scrivere un capitolo di logica matematica. Approfondisco un poco il tema per i più esigenti.
Abbiamo un insieme F di frasi

matematiche di cui, in linea di principio, possiamo dire se siano vere o false.

Ciò che più ci interessa è di sapere se da alcune di queste frasi ne seguono altre; se da
$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n \in F$
segua $\mathcal{F} \in F$.
Cioè, assumendo che $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ siano vere, ne segue che $\mathcal{F}$ è vera?
Mentre le frasi "$0 = \emptyset$" o "$\forall x \in \mathbb{Q} : x \cdot 1 = \cancel{x}$" sono frasi matematiche, le frasi
"$0 = 1$" è falsa,

e da "$\forall x \in \mathbb{Q} : x \cdot 1 = x$" segue che "$1 \cdot 1 = 1$",

sono frasi metamatematiche (frasi che parlano di frasi matematiche).
Il simbolo "$\Longleftrightarrow$" è stato usato in due occasioni:
(i) matematica, per formare una nuova frase "$\mathcal{F}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{F}_2$" da due frasi $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$;
(ii) metamatematica, dicendo che "$\mathcal{F}_1$" $\Longleftrightarrow$ "$\mathcal{F}_2$" quando sia $\mathcal{F}_1$ che $\mathcal{F}_2$ sono vere, o false (equivalenza logica).
Concretamente, questa ambiguità non ci dà gran danno, poiché "$\mathcal{F}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{F}_2$" è vero se e solo se "$\mathcal{F}_1$" $\Longleftrightarrow$ "$\mathcal{F}_2$".

Negazione e connettivi - 2.

(ooo) "non $(\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2)$" $\Longleftrightarrow$ "(non $\mathcal{F}_2$) e $\mathcal{F}_1$"

(oooo) "non(non $\mathcal{F}$)" $\Longleftrightarrow$ "$\mathcal{F}$"

Esempi. (ooo) "non($\forall x$ intero: x pari $\Rightarrow$ x è divisibile per 4)" è equivalente a: "$\exists x$ intero: non(x pari $\Rightarrow$ x divo per 4)", che per (ooo) è a sua volta equivalente a "$\exists x$ intero: x non è divo per 4 e x è pari". Un tale x infatti esiste (p.es., $x = 2$).

OSSERVAZIONE IMPORTANTE. Molte ~~teoremi~~ affermazioni in matematica hanno la forma

(*) $\forall x \in A : Th(x) \Rightarrow T(x)$,

dove A è un insieme, $Th(x)$ è una frase (ipotesi) contenente la variabile x e $T(x)$ è un'altra frase (tesi) dipendente dalla stessa variabile.

Mostrare la falsità di (*), in virtù di quanto visto sinora, significa mostrare la verità di

"non ($\forall x \in A : Th(x) \Rightarrow T(x)$)"

equivalente a

"$\exists x \in A$: non ($Th(x) \Rightarrow T(x)$)"

equivalente a

(**) "$\exists x \in A : Th(x)$ e (non $T(x)$)"

In (**) si chiede di trovare almeno un $x \in A$ t.c. valga l'ipotesi, ma non la tesi.

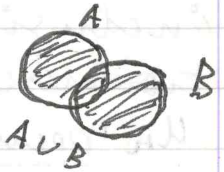
Esempio. Confutare la frase

"ogni uomo con gli occhi azzurri è olandese"

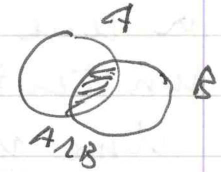
equivale a mostrare che esiste un uomo con gli occhi azzurri che non è olandese.

Operazioni con gli insiemi. Siano A, B insiemi.

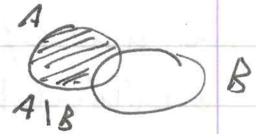
- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$ è l'unione di A e B



- $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ è l'intersezione di A e B



- $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ è la differenza tra A e B



- A e B sono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$
- Se $B \subseteq A$, $A \setminus B$ è chiamato anche il complementare di B in A. (vedi sotto per la definizione di $B \subseteq A$).