Relazione di inclusione.

Siano A, B insiemi. Diciamo che A è <u>sottoinsieme</u> di B
$$A \subseteq B$$
se $\forall x \in A: x \in B$.

<u>NOTA IMPORTANTE</u>. La <u>relazione</u> di inclusione <u>non</u> è un'<u>operazione</u> tra insiemi. tra insiemi

Un'<u>operazione</u> (binaria) tra insiemi associa a una coppia ordinata di insiemi un terzo insieme.

Una <u>relazione</u> (binaria) tra insiemi è un'affermazione sulle coppie ordinate di insiemi, che può essere vera o falsa.

<u>OSS.</u> Per ogni insieme A, $\emptyset \subseteq A$.
(Ciò può parere bizantino, ma è spesso utile).

<u>NOTA.</u> In pratica, ogni volta che si compiono operazioni

su insiemi $A_1, \dots, A_n$, questi sono sottoinsiemi di un insieme U dato (l'<u>insieme universo</u> per quel dato calcolo insiemistico).

Riporto qui sotto una lista (non esaustiva) di proprietà delle operazioni di insiemi $\cup, \cap, \setminus$.

<u>Proposizione.</u> Sia $U \neq \emptyset$ un insieme (l'<u>universo</u>). Allora

(u_1) $\forall A, B \subseteq U: A \cup B = B \cup A$
(u_2) $\forall A, B, C \subseteq U: (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(u_3) $\forall A \subseteq U: A \cup \emptyset = A$
(u_4) $\forall A \subseteq U: A \cup U = U$
(i_1) $\forall A, B \subseteq U: A \cap B = B \cap A$
(i_2) $\forall A, B, C \subseteq U: (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(i_3) $\forall A \subseteq U: A \cap U = A$
(i_4) $\forall A \subseteq U: A \cap \emptyset = \emptyset$
(iu_1) $\forall A, B, C \subseteq U: (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(iu_2) $\forall A, B, C \subseteq U: (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
(u_5) $\forall A \subseteq U: A \cup A = A$
(u_6) $\forall A \in U: A \cap A = A$

(vi) $\forall A, B, C \subseteq U$: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
(vii) $\forall A, B, C \subseteq U$: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

La dimostrazione di queste proprietà è facile.

<u>Annotazione logico-filosofica-2.</u>
C'è una corrispondenza tra connettivi logici e operazioni tra insiemi. La possiamo illustrare così. Fissato un insieme universo U, consideriamo tutte le asserzioni $\mathcal{F}(x)$ su elementi di U, dipendenti da una variabile $x \in U$.

- A ogni asserzione $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ facciamo corrispondere il sottoinsieme $A_{\mathcal{F}} \subseteq U$, $A_{\mathcal{F}} = \{x \in U : \mathcal{F}(x) \text{ è vera}\}$.
- A non $\mathcal{F}$ verrà fatto corrispondere $A_{\text{non}\,\mathcal{F}} = \{x \in U : \text{non } \mathcal{F}(x) \text{ è vera}\}$ $= U \setminus A_{\mathcal{F}}$ è il complementare di $A_{\mathcal{F}}$ (in U).

Così procedendo abbiamo la tabella:

Logica	Insiemi
Asserzioni $\mathcal{F}$ dipendenti da una variabile x	Sottoinsiemi di U
Negazione	Complemento
e	Intersezione
o	Unione

<u>Per esempio</u>, $A_{\mathcal{F}_1 \text{ e } \mathcal{F}_2} = A_{\mathcal{F}_1} \cap A_{\mathcal{F}_2}$.

<u>Nota</u>: nel caso di più variabili, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$, p.es., le cose si fanno un attimo più complesse.

<u>Alle operazioni che permettono di costruire frasi più complesse da frasi più semplici corrispondono operazioni tra insiemi.</u>

Agli enunciati "meta-matematici" (quelli che parlano di frasi matematiche) corrispondono invece relazioni tra insiemi.

Vediamo solo gli esempi principali.

- "$\forall x \in U : \mathcal{F}(x)$" è vera se e solo se $A_{\mathcal{F}} = U$
- "$\exists x \in U : \mathcal{F}(x)$" è vera se e solo se $A_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$
- "$\forall x \in U : \mathcal{F}_1(x) \Rightarrow \mathcal{F}_2(x)$" è vera se e solo se $A_{\mathcal{F}_1} \subseteq A_{\mathcal{F}_2}$.

In particolare, se $\mathcal{F}_1(x)$ e $\mathcal{F}_2(x)$ sono proprietà di $x \in U$, dall'ipotesi $\mathcal{F}_1(x)$ segue la tesi $\mathcal{F}_2(x)$ se e solo se $A_{\mathcal{F}_1} \subseteq A_{\mathcal{F}_2}$.

Esempio. "I numeri interi divisibili per 4 sono pari" diventa l'inclusione
$\{n \text{ interi} : n \text{ è divisibile per } 4\}$
$\subseteq \{n \text{ interi} : n \text{ è divisibile per } 2\}$.

Capitolo 2

Numeri e operazioni

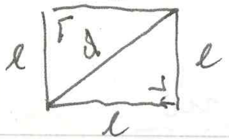
Diamo per conosciuti i seguenti insiemi di numeri e le proprietà delle quattro operazioni su di essi.

- Numeri naturali (interi positivi).
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$
- Numeri interi.
  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots\}$
- Numeri razionali.
  $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$.

Poniamo $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ sse $pn = mq$

È comodo pensare $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Già i pitagorici scoprirono che $\mathbb{Q}$ non era sufficiente a dar conto dei rapporti geometrici più elementari (di alcuni di essi).



Sia d la diagonale di un quadrato di lato l.
Sia $x = d/l$ il rapporto tra le due lunghezze. Per il T. di Pitagora:
$x^2 l^2 = (xl)^2 = d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$,
cioè $x \geq 0$ e $\boxed{x^2 = 2}$.

<u>Teorema</u>. $\forall x \in \mathbb{Q}: x^2 \neq 2$.

<u>dim</u>. Sia ~~x t.c. x² = 2~~
$x \in \mathbb{Q}$ t.c. (per assurdo) $x^2 = 2$.
Poiché $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ e possiamo supporre che $\mathrm{M.C.D.}(m, n) = 1$ (cioè, m e n non hanno fattori in comune).
Allora $2 = x^2 = \frac{m^2}{n^2}$; $m^2 = 2n^2$.
Ne segue che m^2 è pari, quindi m è pari (m dispari $\Rightarrow m^2$ dispari): $m = 2k$.
Allora, $2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$, cioè $n^2 = 2k^2$.
Ne segue che n è pari.
Allora, $\mathrm{MCD}(m, n) \neq 1$, assurdo ∎

Al fine di esprimere $\sqrt{2}$ e altri utili numeri, si "estende" $\mathbb{Q}$ a un insieme di numeri più grande, in cui le proprietà di $\mathbb{Q}$ comunque valgano.
Millenni di discussioni e tentativi hanno individuato l'estensione più maneggevole e utile a descrivere la natura: i <u>numeri reali</u>.
Introduciamo l'insieme dei numeri reali in maniera <u>assiomatica</u>, facendo un certo numero di "richieste". Che un oggetto con le proprietà richieste esista è vero, ma non banale da dimostrare.
L'insieme dei numeri reali sarà indicato con $\mathbb{R}$ e l'<u>insieme</u> in sé è poco utile: lo dotiamo di due <u>operazioni</u> ($+$ e $\cdot$) e di una <u>relazione d'ordine</u> ($\leq$).
Supponiamo che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
<u>NOTA</u>. Il sistema di assiomi che introduciamo sarà, per comodità, assai "ridondante".