Breve excursus sul valore assoluto.

Def. Sia $a \in \mathbb{R}$. Il <u>valore assoluto</u> $|a|$ di a è

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a \leq 0 \end{cases}$$

(Per $a = 0$, le definizioni coincidono!!)

<u>Proprietà</u>. (1) $\forall a \in \mathbb{R}: |a| \geq 0$ e $(|a| = 0 \iff a = 0)$

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(3) $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a + b| \leq |a| + |b|$

(<u>Proprietà triangolare</u> di $|\cdot|$).

(4) $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

<u>dim.</u> (1) e (2) sono ovvie.

(3) lo dimostriamo sotto.

(4) Uso (3):

$|b| = |a + (b - a)| \leq |a| + |b - a|$,

quindi: $|b| - |a| \leq |b - a|$

Allo stesso modo $|a| - |b| \leq |a - b| = |b - a|$

(perché $a - b = -(b - a)$, quindi hanno lo stesso valore assoluto).

Se $|a| - |b| \geq 0$, $\big||a| - |b|\big| = |a| - |b| \leq |a - b|$

e se $|a| - |b| < 0$, $\big||a| - |b|\big| = |b| - |a| \leq |a - b|$ ∎

Alcune proprietà utili del val. ass.

(5) • $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a| = |b| \iff a = b$ o $a = -b$

(6) • $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a| = |b| \iff a^2 = b^2$

<u>dim.</u> $a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a - b)(a + b) = 0$

$\iff a = b$ o $a = -b \iff |a| = |b|$ ∎

(7) • $\forall a \in \mathbb{R}: a^2 = |a|^2$

(8) • $\forall a, b \in \mathbb{R}: a^2 < b^2 \iff |a| < |b|$

<u>dim.</u> $0 \leq |a| < |b| \Rightarrow 0 \leq \underset{\displaystyle a^2}{\underset{\shortparallel}{|a|^2}} < \underset{\displaystyle b^2}{\underset{\shortparallel}{|b|^2}}$

Ciò dimostra $(\Leftarrow)$.

Mostriamo ora $(\Rightarrow)$.

Se fosse $|a| = |b|$, allora $a^2 = b^2$: assurdo.

Se fosse $|a| > |b|$, allora $a^2 > b^2$: assurdo

Allora, per esclusione, $|a| < |b|$ ∎

Possiamo ora mostrare (3) facilmente.

$$\begin{aligned} |a + b|^2 = (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

perché $x \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Usando (6) e (8) e il fatto che $|a + b|, |a| + |b| \geq 0$:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$ ∎