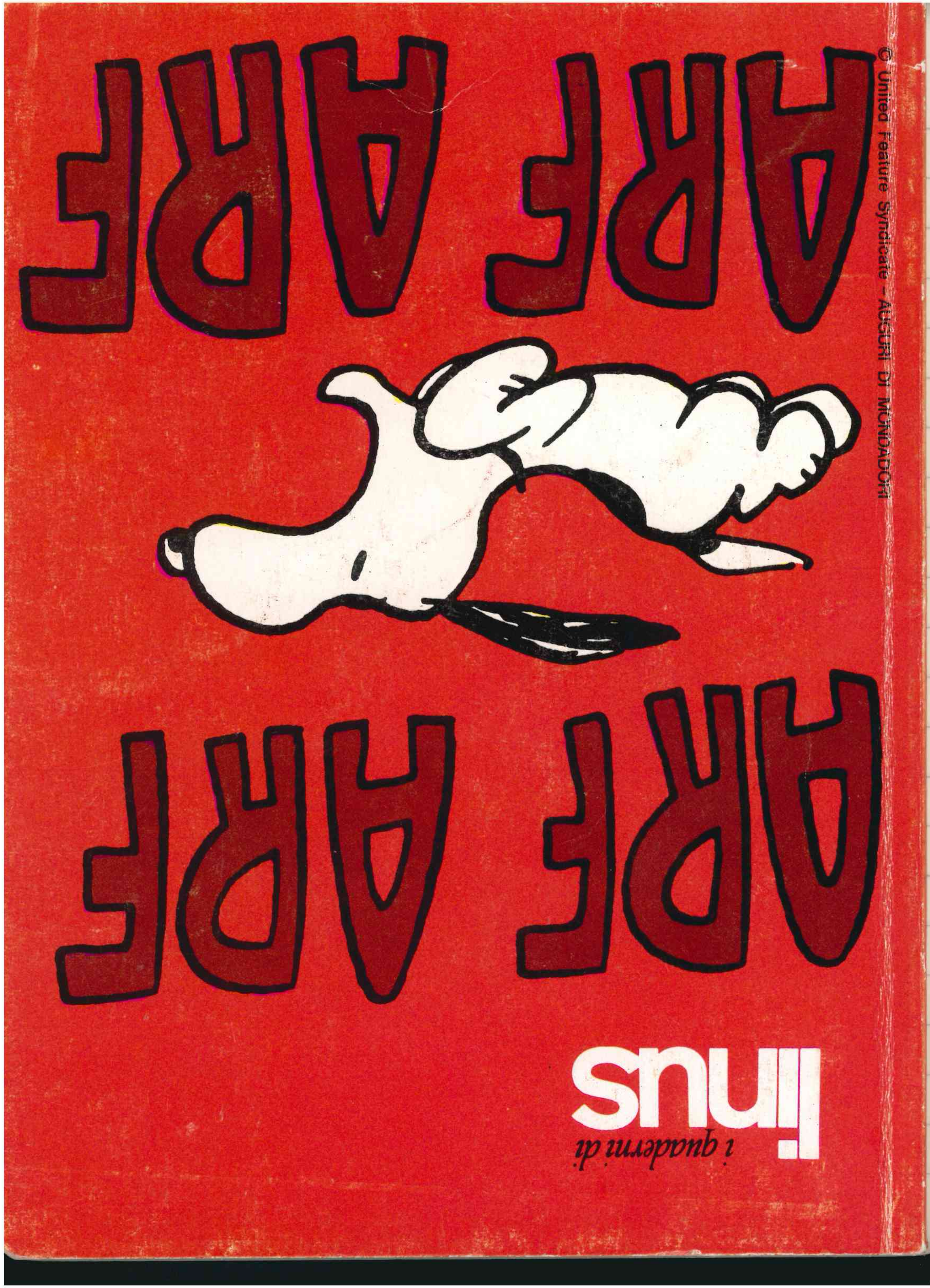



Successioni.

~~Df~~. Una successione in $\mathbb{R}$ è una maniera di associare a ogni $n \in \mathbb{N}$ un numero $a_n \in \mathbb{N}$:

$$n \mapsto a_n$$

NOTA. Talvolta la successione $n \mapsto a_n$ è definita solo per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ o (più in generale) per $n \geq k_0$, dove $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ è assegnato.

Notazione: la successione $n \mapsto a_n$ si scrive anche $\{a_n\}$, o $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$.

Esempi. (1) $a_n = 2n$;
$0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$
(successione dei numeri pari)

(2) $n \mapsto 2n+1 = a_n$ (dispari)

(3) $n \mapsto n^2$ (quadrati di interi pos.)

(4) $n \mapsto (-1)^n$
$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, (-1)^{n+1}$

Nota: $\{(-1)^n\} \neq \{-1, 1\}$
successione — insieme

(5) $a_n = \frac{1}{2^n}$

Spesso, in pratica, le successioni sono date per ricorrenza. Esempi:

(6) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = a_n + n + 1$$

(cioè, $a_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$)

(7) $a_0 = 1$; $a_n = n \cdot a_{n-1}$

P.es. $a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3 \cdot a_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1$
$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_0 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

In generale:

$$a_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Gli si dà un nome:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

è il fattoriale di $n$.

Per convenzione, $0! = a_0 = 1$.

(8) $a_0 = 1$

$$a_n = \begin{cases} 3a_{n-1} + 1 & \text{se } a_{n-1} \text{ è pari} \\ \frac{a_{n-1}}{2} & \text{se } a_{n-1} \text{ è dispari} \end{cases}$$

I primi termini:

$a_0 = 1$ $a_1 = 4$ $a_2 = 2$ $a_3 = 1$

Da quel punto la successione si ripete: $a_3 = 1$ $a_4 = 4$ $a_5 = 2$ $a_6 = 1$ ...

$a_{3k+j} = a_j$.

(la successione è "periodica" di "periodo" 3).

NOTA. Nell'esempio sopra potrei prendere $a_0 = A \in \mathbb{N}$ diverso da 1.
Consideriamo p.es. $A = 7$:

$a_0 = 7$

$$a_n = \begin{cases} 3a_{n-1} + 1 & \text{se } a_{n-1} \text{ è dispari} \\ a_{n-1}/2 & \text{se } a_{n-1} \text{ è pari} \end{cases}$$

$a_n = 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13,$
$40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$

da questo punto sappiamo come procedere (e si riparte come sopra).

Problema aperto da molto tempo: è vero che per ogni scelta di $a_0$ esiste $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 1$?

Molti ingegni (matematici, informatici) ci hanno provato invano.

## Definizione di limite di una successione.

Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$ e sia $l \in \mathbb{R}$. Diciamo che $l$ è il limite di $\{a_n\}$ per $n$ che tende a infinito se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon.$$

Si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

**Def.** Una successione $\{a_n\}$ in $\mathbb{R}$ è convergente se esiste $l \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Esempio. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Dim. Sia $\varepsilon > 0$ fissato.

Cerco $n(\varepsilon)$ t.c.

$\forall n \geq n(\varepsilon)$: $\frac{1}{n} = |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

cioè $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

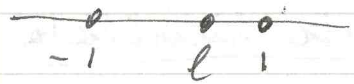
Sia $n(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$: $\forall n \geq \frac{1}{\varepsilon} = n(\varepsilon)$: $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$.

Ciò vale per ogni $\varepsilon > 0$, quindi ho che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Esempio. Sia $\{a_n\}$ in $\mathbb{R}$; $a_n = (-1)^n$.

La successione $\{(-1)^n\}$ non è convergente.

Dim. Sia $l \in \mathbb{R}$ e supponiamo per assurdo che $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = l$.



Fisso $\varepsilon = 1/2$. Allora, esiste $\bar{n} > 0$: $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$|(-1)^n - l| \leq 1/2.$$

Sia $n = 2k$ pari, $2k \geq \bar{n}$. Allora:

$$1/2 \geq |(-1)^{2k} - l| = |1 - l|$$

e (poiché $2k+1 > 2k \geq \bar{n}$):

$$1/2 \geq |(-1)^{2k+1} - l| = |-1 - l| = |1 + l|$$

Quindi:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq |1 - l| + |1 + l| \geq$$
$$\geq |(1 - l) + (1 + l)| = |1 + 1| = 2,$$

cioè $1 \geq 2$, assurdo ■

Notazione. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, dico che $l$ è il limite di $\{a_n\}$. Si scrive anche

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$$

o $a_n \to l$ (se non ci sono ambiguità

**Def.** Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.
$\{a_n\}$ è <u>superiormente limitata</u> se $\exists M \in \mathbb{R}$:
$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq M$.

$\{a_n\}$ è <u>inferiormente limitata</u> se $\exists m \in \mathbb{R}$:
$\forall n \in \mathbb{N}: \quad m \leq a_n$

$\{a_n\}$ è <u>limitata</u> se è superiormente $\underline{\underline{e}}$ inferiormente limitata.

<u>Teorema</u>. Se $\{a_n\}$ è una successione ~~[illegible]~~ convergente in $\mathbb{R}$ allora $\{a_n\}$ è limitata.

<u>Dim.</u> Sia $l = \lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$.
Per definizione di limite, esiste $\bar{n} > 0$ t.c.
$\forall n \geq \bar{n}: \quad |a_n - l| \leq 1$,
cioè che $-1 \leq a_n - l \leq 1$
cioè che $-1 + l \leq a \leq l + 1$
Siano quindi:
$A = \max\{a_n : 0 \leq n < \bar{n}\}$
$B = \min\{a_n : 0 \leq n < \bar{n}\}$ $\to B \leq A$

Allora, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$a_n \leq \max(A, l+1) = M$
e $a_n \geq \min(B, l-1) = m$
cioè, $\{a_n\}$ è limitata $\blacksquare$

Il viceversa non vale: $\{(-1)^n\}$ è limitata, ma non è convergente.

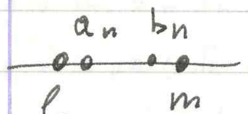
<u>Teorema</u> (Unicità del limite). Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$ e siano $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.
Se $\lim_{n \to \infty} a_n = l_1$ e $\lim_{n \to \infty} a_n = l_2$,
allora $l_1 = l_2$
(<u>In particolare</u>, il simbolo $\lim_{n \to \infty} a_n$ è ben definito e lo possiamo usare senza troppi problemi).

<u>Dim.</u> ~~[illegible]~~
Sia ~~[illegible]~~ $\varepsilon > 0$, qualsiasi.
Allora, $\exists n_1 > 0: \forall n \geq n_1: |a_n - l_1| \leq \varepsilon$
e $\exists n_2 > 0: \forall n \geq n_2: |a_n - l_2| \leq \varepsilon$.
Quindi, $\forall n \geq \max(n_1, n_2)$:
$|l_1 - l_2| = |(a_n - l_2) - (a_n - l_1)|$
$\leq |a_n - l_2| + |a_n - l_1| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$,
cioè $\forall \varepsilon > 0: |l_1 - l_2| \leq 2\varepsilon$.
Allora $|l_1 - l_2| = 0$, cioè $l_1 = l_2$ $\blacksquare$

# Teoremi di confronto per i limiti

**Teorema del confronto.** Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$ e supponiamo che $\forall n \geq 1$: $a_n \geq b_n$.
Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m \in \mathbb{R}$, allora
$$\ell \geq m.$$

**Dim.** Supponiamo per assurdo che $\ell < m$ (fig. (*)).

(*) 

Sia $\varepsilon = (m-\ell)/3 > 0$. Per def. di limite,

$\exists n_1 > 0: \forall n \geq n_1 \Rightarrow \frac{m-\ell}{3} \geq |a_n - \ell| \geq a_n - \ell$

$\exists n_2 > 0: \forall n \geq n_2 \Rightarrow \frac{m-\ell}{3} \geq |b_n - m| \geq m - b_n$

Se $n \geq \max(n_1, n_2)$, allora

$\frac{2}{3}(m-\ell) = \frac{m-\ell}{3} + \frac{m-\ell}{3} \geq a_n - \ell + m - b_n$

$= m - \ell + a_n - b_n \geq m - \ell$ (perché $a_n \geq b_n$)

cioè: $\frac{2}{3}(m-\ell) \geq m - \ell$

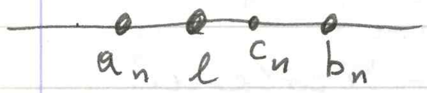
cioè $\frac{m-\ell}{3} \leq 0$, da cui $m \leq \ell$,

contro l'ipotesi $\ell > m$ ∎

**Teorema "dei due carabinieri".**
Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$:
(1) $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$
(2) $\forall n \geq 0$: $a_n \leq c_n \leq b_n$.
Allora: $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$.

NOTA. Il bello del Teorema è che esiste il limite.

**Dim.** Fisso $\varepsilon \geq 0$ qualsiasi. Si avrà



$n_1 > 0: \forall n \geq n_1: |a_n - \ell| \leq \varepsilon$
$n_2 > 0: \forall n \geq n_2: |b_n - \ell| \leq \varepsilon.$

Se $n \geq \max(n_1, n_2)$, allora

$c_n - \ell \leq b_n - \ell \leq |b_n - \ell| \leq \varepsilon$

e $c_n - \ell \geq a_n - \ell \geq -|a_n - \ell| \geq -\varepsilon$,

quindi $-\varepsilon \leq c_n - \ell \leq \varepsilon$

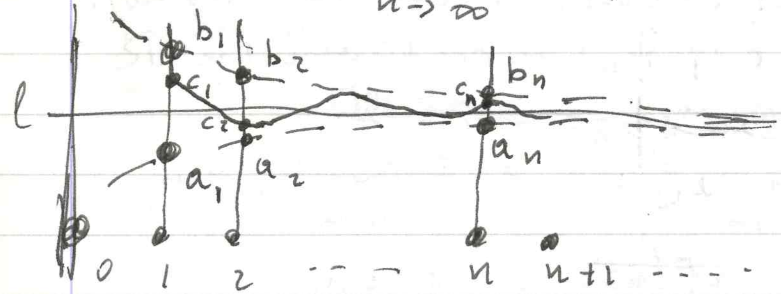
cioè, $|c_n - \ell| \leq \varepsilon$ ∎

**Oss.** È essenziale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

P.es., se $a_n = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$ e $b_n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$,

anche se $a_n \leq c_n = (-1)^n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

non esiste $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$, come già visto.



**Proprietà.** Se $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, allora $\exists \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell| \in \mathbb{R}$.

**Dim.** Sia $\varepsilon \geq 0$. Sia $n(\varepsilon)$: $n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \ell| \leq \varepsilon$.
Se $n \geq n(\varepsilon)$, allora $||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell| \leq \varepsilon$, da cui la tesi ∎

In generale, il viceversa della proposizione non vale. p. es., se $a_n = (-1)^n$, allora $\exists \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, ma non esiste $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$.

Il caso $l = 0$ è particolare.

<u>Proprietà</u>: Sia $\{a_n\}$ una succ. in $\mathbb{R}$. Allora,

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \exists \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

<u>Dim.</u> ($\Rightarrow$) lo sappiamo già.

($\Leftarrow$) piuttosto ovvio: Sia $\varepsilon > 0$. Allora ~~esiste~~ $\exists\, n(\varepsilon) > 0$: $\forall n \geq n(\varepsilon)$:

$$\varepsilon \geq \big|\, |a_n| - 0 \,\big| = |a_n - 0|.$$

Quindi, $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ∎

<u>Teorema</u> (permanenza del segno). Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$ ~~e sia $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.~~ Se $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = l$ e $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = m$, ~~allora~~ e $l < m$, allora $\exists R \geq 0$: $\forall n \geq R \Rightarrow a_n < b_n$

<u>OSS.</u> Questa è una specie di proprietà inversa del confronto.

<u>Dim.</u> Ripetendo alla lettera la dim. del Teo. del confronto... Sia $\varepsilon = \frac{m-l}{3}$. Allora

$$\exists R_1 > 0 : \forall n \geq R_1 \Rightarrow a_n \leq l + \frac{m-l}{3}$$

$$\exists R_2 > 0 : \forall n \geq R_2 \Rightarrow b_n \geq m - \frac{m-l}{3}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \max(R_1, R_2):$$

$$b_n \geq m - \frac{m-l}{3} = \frac{2m+l}{3} >$$

perché $m > l$

$$> \frac{2l+m}{3} = l + \frac{m-l}{3} \geq a_n,$$

cioè $b_n > a_n$ $\forall n \geq \max(R_1, R_2)$. ∎

<u>OSS.</u> (1) Se avessimo $l = m$ nel T. della permanenza del segno, non potremmo dedurre che $b_n \geq a_n$ $\forall n \geq R$ ($\exists R > 0$). Ciò segue banalmente dal fatto che esistono successioni diverse aventi lo stesso limite. (p. es. $a_n = 1/n$ e $b_n = -1/n$)

(2) Nel T. del confronto non guadagno nulla ipotizzando $a_n > b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. p. es. $a_n = \frac{1}{n} > b_n = 0$ $\forall n$, ma $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$