Prima di procedere oltre, due note sulla definizione di limite.

(1) Non è necessario che la successione $\{a_n\}$ sia definita per ogni $n \in \mathbb{N}$. Basta che sia definita $\forall n \geq \bar{n}$, con un $\bar{n}$ qualsiasi.
L'esistenza e l'identità di un limite, infatti, non dipendono dai primi $\bar{n}$ termini della successione.

Un modo per rendere preciso ciò:
Proprietà. Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ succ. in $\mathbb{R}$ ($n \geq 0$) e supponiamo che $\exists \bar{n}: \forall n \geq \bar{n} \Rightarrow a_n = b_n$.
Allora:
(i) $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} b_n$ (e i limiti coincidono!)
(ii) $\{a_n\}$ è limitata $\Leftrightarrow$ $\{b_n\}$ è limitata
~~Invece~~ Però:
(iii) Può essere che $\exists\, MAX\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ma che $\nexists\, MAX\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Esempio: $a_n = \begin{cases} 10 & \text{se } n = 0 \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n > 0 \end{cases}$: $MAX\{a_n\} = 10$
e $b_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n = 0 \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n = 0 \end{cases}$: non esiste $MAX\{b_n\}$

(2) Invece di chiedere nella definizione di limite di una successione, che $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$; potremmo chiedere che $|a_n - \ell| \leq 2\varepsilon$.
Cioè, (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ se e solo se
(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists R > 0 : \forall n \geq R : |a_n - \ell| \leq 2\varepsilon$.

Dim. È chiaro che (a) $\Rightarrow$ (b): $\varepsilon < 2\varepsilon$!
Mostro che (b) $\Rightarrow$ (a).
Se vale (b) e se $\eta > 0$ è fissato, ~~considero~~ cerco $\varepsilon > 0$: $2\varepsilon \leq \eta$
(p. es. $\varepsilon = \eta/2$).
Per (b), $\exists R > 0 : \forall n \geq R$:
$|a_n - \ell| \leq 2 \cdot \varepsilon \leq \eta$
Cioè $\forall \eta > 0\ \exists R > 0 : \forall n \geq R : |a_n - \ell| \leq \eta$,
cioè $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. ∎

Possiamo dunque sostituire $\varepsilon > 0$ nella definizione con:
2ε; $C \cdot \varepsilon$ (con $C > 0$ costante fissata); ε^2; $\sqrt{\varepsilon}$ ... eccetera (provate con $\sqrt{\varepsilon}$).
In generale, possiamo sostituire $\varepsilon > 0$ con un'espressione $f(\varepsilon)$ se:
(A) $\forall \varepsilon > 0 : f(\varepsilon) > 0$
(B) $\forall \eta > 0\ \exists \varepsilon > 0 : f(\varepsilon) \leq \eta$.

Limiti a $+\infty$ e $-\infty$.

Def. Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff$
$\forall M>0\ \exists R>0 : \forall n \geq R \Rightarrow a_n \geq M$.

Def. Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.
$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff$
$\forall M>0\ \exists R>0 : \forall n \geq R \Rightarrow a_n \leq -M$.

Diciamo che $\{a_n\}$ è

- divergente a $+\infty$ se $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- divergente a $-\infty$ se $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- divergente a ∞ se $\exists \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Nota. $+\infty$ e $-\infty$ sono segni convenzionali. Per definizione, poniamo
$-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Oss. Se $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, allora diverge a ∞.
Il viceversa non vale (vedi esempio più sotto).

Esempio. $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

Dim. Sia $M>0$. Voglio $n = a_n \geq M$:
pongo $R = M$. $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow a_n = n \geq M$ ∎

Esempio. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Dim. Sia $M>0$. Voglio $\sqrt{n} = a_n \geq M$,
cioè $n \geq M^2$ (posso dire
$\sqrt{n} \geq M \iff n \geq M^2$ perché $n, M \geq 0$).
Pongo $R = M^2$:
$\forall M>0 : n \geq M^2 \Rightarrow \sqrt{n} \geq M$
(quindi $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$). ∎

Esempio. $a_n = (-1)^n n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è pari} \\ -n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
diverge a ∞ perché $|a_n| = n \to +\infty$.
Però $\{a_n\}$ non diverge a $+\infty$, né a $-\infty$.
Verifico che non vale $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Sia $M>0$, fissato. Sia $R>0$ qualsiasi. Sia $n = 2k+1$ un numero dispari ($k \in \mathbb{N}$) t.c. $2k+1 > R$ (tale k esiste per la Prop. di Archimede!).
Allora $a_n = -(2k+1) < 0 < M$:
non è vero che $\exists R>0 : \forall n \geq R \Rightarrow a_n \geq M$.

Notazione: $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ è la retta reale estesa.

I teoremi di confronto si estendono a $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ come segue.

Teorema del confronto. Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$; sia $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n$ e supponiamo che

$$\exists\, \ell = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\};\ \exists\, m = \lim_{n\to\infty} b_n \in \{\pm\infty\}.$$

Allora

$$\ell \leq m.$$

Teorema dei due carabinieri. Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$;

$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq c_n \leq b_n$;

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$$

Pongo $|+\infty| = +\infty = |-\infty|$.

Proprietà. Se $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora $\exists \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Teorema (permanenza del segno con $\pm\infty$)

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \exists R > 0: \forall n \geq R \Rightarrow a_n > 0$.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \exists R > 0: \forall n \geq R \Rightarrow a_n < 0$.

Valgono alcune proprietà "nuove".

Teorema (1) Se $\{a_n\}$ è una successione in $\mathbb{R}$ e $\{a_n\}$ diverge a ∞, allora è illimitata.

(2) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, allora $\{a_n\}$ è superiormente illimitata.

(3) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, allora $\{a_n\}$ è inferiormente illimitata.

Dim. (1) $\{a_n\}$ diverge a $+\infty \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists R > 0: n \geq R \Rightarrow |a_n| \geq M$

$\Rightarrow \forall M > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: |a_n| \geq M$

$\Leftrightarrow \{a_n\}$ è illimitata.

(2) e (3) si mostrano analogamente $\blacksquare$

Teorema (dell'"un carabiniere"?).

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$ t.c.

- $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n$
- $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

Dim. Sia $M > 0$ e sia $R = R(M) > 0$:

$\forall n \geq R \Rightarrow a_n \geq M$.

Allora $\forall n \geq R \Rightarrow b_n \geq a_n \geq M$. $\blacksquare$

Un enunciato analogo vale con $-\infty$.

Dimostrazioni dei teoremi di confronto, dei carabinieri, segno con $+\infty$ e $-\infty$.

<u>Dim.</u> <u>Di confronto</u>. I nuovi casi sono con $l \in \{\pm\infty\}$ o $m \in \{\pm\infty\}$.

Se per assurdo $l > m$, allora $l = +\infty$ o $m = -\infty$ (gli altri casi li abbiamo visti).

Suppongo $l = +\infty$ e $m \in \mathbb{R}$. Sia $M = m+1$ e sia $\varepsilon = 1/2$

$\exists R_1 > 0 : n \geq R_1 \Rightarrow a_n \geq m+1$

$\exists R_2 > 0 ; n \geq R_2 \Rightarrow b_n \leq m + \frac{1}{2} < m+1 \leq a_n$,

cioè $n \geq \max(R_1, R_2) \Rightarrow b_n < a_n$,

contro l'ipotesi.

I casi $l = +\infty$, $m = -\infty$

$l \in \mathbb{R}$, $m = -\infty$

sono lasciati come esercizio ∎

<u>Dim.</u> <u>Dei carabinieri</u>. Nel caso $l = +\infty$ o $l = -\infty$ possiamo usare il (più forte) T. di <u>un</u> carabiniere. ∎

<u>Dim.</u> (Permanenza del segno). Sia $l = +\infty$.

Allora $\exists R > 0 : \forall n \geq R \Rightarrow a_n \geq 1 > 0$ ∎