Proprietà algebriche dei limiti.

Teorema. Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni convergenti in $\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$; $\lim_{n\to\infty} b_n = m$.
Allora,

(+) $\exists \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \ell + m$

($\cdot$) $\exists \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

($\%$) Se $m \neq 0$, allora $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

(Const) Se $k \in \mathbb{R}$ è una costante,
$\exists \lim_{n\to\infty} (k a_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$

OSS. Sulla sinistra di (+), ($\cdot$), ($\%$), (Const) vi sono – implicitamente definite – delle successioni costruite a partire da $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Rendiamole esplicite:

(+) $\{a_n\} + \{b_n\} := \{a_n + b_n\}$; $n \mapsto a_n + b_n$
è la somma delle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

($\cdot$) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} := \{a_n \cdot b_n\}$ è il prodotto

($\%$) $\{a_n\} : \{b_n\} := \{a_n : b_n\}$ è il quoziente.
Affinché il quoziente sia definito, occorre che $\exists n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow b_n \neq 0$, così da avere che $\{a_n : b_n\}$ è definita per $n \geq n_0$.

Dim (+). Sia $\varepsilon > 0$. Per ipotesi,
$\exists R_1 > 0$ $\forall n \geq R_1 \Rightarrow |a_n - \ell| \leq \varepsilon$ e
$\exists R_2 > 0$ $\forall n \geq R_2 \Rightarrow |b_n - m| \leq \varepsilon$; così che
$\forall n \geq R := \max\{R_1, R_2\} \Rightarrow |(a_n + b_n) - (\ell + m)|$
$= |(a_n - \ell) + (b_n - m)|$
$\leq |a_n - \ell| + |b_n - m|$ (P. Triangolare)
$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.
Quindi, $\exists \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \ell + m$.

OSS. Le quantità $|a_n - \ell|$ e $|b_n - m|$ sono apparse "naturalmente". Nel prossimo caso, per farle apparire occorrerà "scolpire" un'espressione algebrica.

($\cdot$) Sia $\varepsilon > 0$ qualsiasi e siano, come sopra,
$R_1 > 0$ t.c. $\forall n \geq R_1 \Rightarrow |a_n - \ell| \leq \varepsilon$ e
$R_2 > 0$ t.c. $\forall n \geq R_2 \Rightarrow |b_n - m| \leq \varepsilon$.
Osservo che $|a_n b_n - \ell m| =$
$= |a_n b_n - b_n \ell + b_n \ell - \ell m|$
$= |b_n (a_n - \ell) + \ell \cdot (b_n - m)|$
$\leq |b_n| \cdot |a_n - \ell| + |\ell| \cdot |b_n - m|$.

Poiché $\{b_n\}$ converge in $\mathbb{R}$, $\{b_n\}$ è limitata, quindi

$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| \leq M.$

Dunque,

$|a_n b_n - \ell m| \leq |b_n| \cdot |a_n - \ell| + |\ell| \cdot |b_n - m|$

$\leq M \cdot |a_n - \ell| + |\ell| \cdot |b_n - m|$

$\leq M \cdot \varepsilon + |\ell| \cdot \varepsilon \quad (\text{se } n \geq \max(R_1, R_2))$

$= (M + |\ell|) \cdot \varepsilon$: ho che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R = \max(R_1, R_2)$:

$n \geq \max(R_1, R_2) \Rightarrow |a_n b_n - \ell m| \leq (M + |\ell|)\varepsilon$

cioè, $a_n b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell m$.

<u>OSS.</u> Il passaggio

$a_n b_n - \ell m = b_n(a_n - \ell) + \ell(b_n - m)$

è un'uguaglianza valida per ogni valore di a_n, b_n, ℓ, m.

Il vantaggio dell'espressione a destra è che fa emergere $(a_n - \ell)$ e $(b_n - m)$, su cui le ipotesi ci danno delle informazioni.

(%) Provo a ragionare come in (•).

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{\ell}{m} = \frac{m a_n - \ell b_n}{b_n \cdot m} = \frac{m a_n - m\ell + m\ell - \ell b_n}{b_n \cdot m}$$

$$= \frac{m(a_n - \ell)}{b_n \cdot m} - \frac{\ell(b_n - m)}{b_n \cdot m} :$$

le espressioni $(b_n - m)$ e $(a_n - \ell)$ ci sono!

Posso avere fastidi da b_n al den.?

Ho che $m \neq 0$ per ipotesi.

Suppongo $m > 0$ (se $m < 0$: stesso ragionamento).

~~Per [illegible]~~

[illegible] Per la def. di limite,

$\exists R_3 > 0$ t.c. $n \geq R_3 \Rightarrow b_n \geq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}$

e per ipotesi:

$\exists R_1 > 0 : n \geq R_1 \Rightarrow |a_n - \ell| \leq \varepsilon$ e

$\exists R_2 > 0 : n \geq R_2 \Rightarrow |b_n - \ell| \leq \varepsilon.$

Dunque:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{\ell}{m} \right| \leq \frac{1}{|b_n|} \cdot |a_n - \ell| + \frac{|\ell| \cdot |b_n - m|}{|b_n| \cdot |m|}$$

$$\leq \frac{1}{m/2} \varepsilon + \frac{|\ell|}{m/2 \cdot m} \cdot \varepsilon \quad (\text{se } n \geq \max(R_1, R_2, R_3))$$

$$= \frac{2}{m}\left(1 + \frac{|\ell|}{m}\right) \cdot \varepsilon$$

Da cui $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\ell}{m}$.

(const.). Poiché $b_n = k$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Uso (•) per dire che

$$\lim_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = \lim_{n\to\infty} k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$= k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \blacksquare$$

<u>Esercizio teorico.</u> Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$ t.c.
$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = l > 0$.
Mostrare che $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$.

<u>Esercizio teorico.</u> Date le successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ in $\mathbb{R}$, si definiscano
$MAX(\{a_n\}, \{b_n\}) := \{MAX(a_n, b_n)\}$ e
$\min(\{a_n\}, \{b_n\}) := \{\min(a_n, b_n)\}$.
Mostrare che, se $a_n \to l \in \mathbb{R}$ e $b_n \to m \in \mathbb{R}$, allora

$$MAX(a_n, b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} MAX(l, m)$$

e $\min(a_n, b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \min(l, m)$.

<u>Esempi.</u> (1) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+4}$.
Lo faccio in ~~tre~~ quattro maniere.

(1.1) Con la definizione.
Fisso $\varepsilon > 0$ (qualsiasi) e cerco $R \geq 0$:
$\forall n \geq R \Rightarrow \left|\frac{1}{n+4} - 0\right| \leq \varepsilon$, così che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+4} = 0$
(<u>Problema</u>: come ho indovinato il limite?).
Poiché $\frac{1}{n+4} > 0$, voglio $\frac{1}{n+4} < \varepsilon$
cioè $\frac{1}{\varepsilon} < n+4$. ~~cioè~~
Per esempio, $n > \frac{1}{\varepsilon}$:
$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n+4} < \varepsilon$.

(1.2) Proprietà algebriche.

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \cdot \frac{1}{1+0}$$

cioè, $\frac{1}{n+4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ poiché $\frac{1}{n} \to 0$ (già visto)
(qui non ho dovuto <u>indovinare</u> il limite <u>prima</u> di calcolarlo: l'ho calcolato e indovinato insieme).

(1.3) Col confronto.
$\forall n \geq 1: n+4 > n \Rightarrow \frac{1}{n+4} < \frac{1}{n}$

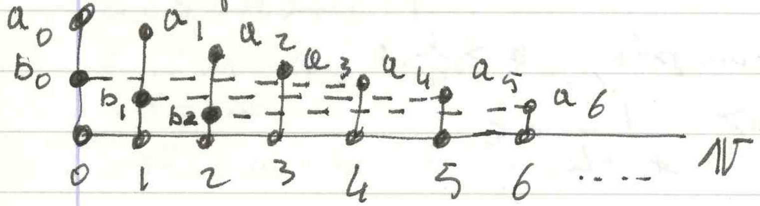
Ora, $0 < \frac{1}{n+4} < \frac{1}{n} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+4} = 0$
$\quad\;\; \downarrow \qquad\qquad\quad \downarrow$
$\quad\;\; 0 \quad \Longrightarrow \quad 0$
per il T. dei 2 carabinieri.

104 La successione $b_n = \frac{1}{n+4}$ è la successione $a_n = \frac{1}{n}$ "traslata" di 4:

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad b_n = a_{n+4}$

(b_n si ottiene "anticipando" a_n di 4 nella variabile n, il "tempo").

La figura:



$b_0 = a_4$, $b_1 = a_5$, $b_2 = a_6$, ...

I punti del piano che rappresentano $\{b_n\}$ si ottengono da quelli che rappresentano $\{a_n\}$ facendoli arretrare di 4 sull'"asse" degli $n \in \mathbb{N}$.

"PRINCIPIO DI RELATIVITÀ". Sia $n_0 \in \mathbb{N}$: il grafico della successione ottenuta da $\{a_n\}$ anticipando di n_0,

$$b_n = a_{n+n_0}$$

si ottiene spostando il grafico di $\{a_n\}$ all'indietro di n_0 unità.

Vale:

Proprietà. Siano $\{b_n\}$, $\{a_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$,

$$b_n = a_{n+n_0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(con $n_0 \in \mathbb{Z}$ fissato: anche negativo).

Allora $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ se e solo se $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = m$.

Inoltre, $m = \ell$.

dim. Potete farla come Esercizio per $n_0 > 0$, p. esempio.

Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

OSS. La successione $\{a_n\}$ e la successione $\{b_n\} = \{a_{n+n_0}\}$ ottenuta anticipando ($n_0 > 0$) o ritardando ($n_0 < 0$) $\{a_n\}$ hanno, più in generale, le stesse proprietà asintotiche, quelle proprietà - cioè - che dipendono dai valori di $\{a_n\}$ "da un certo n in poi" solamente.

Infatti, potremmo definire come asintotica una proprietà di $\{a_n\}$ che vale $\Leftrightarrow$ vale ~~per~~ anche per $\{a_{n+n_0}\}$ $\forall n_0 \in \mathbb{Z}$.

(2) Calcolare $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+3}{5n^2+7n+11}$

<u>Nota</u>: usare la def. di limite pare (inutilmente) difficile.

$$\frac{2n^2+3}{5n^2+7n+11} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2+3/n^2}{5+7/n+11/n^2}$$

$$= \frac{2+3/n^2}{5+7/n+11/n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{2+0}{5+0+0} = \frac{2}{5},$$

usando le proprietà algebriche dei limiti.

Ho usato l'idea euristica (per ora) di mettere in evidenza ciò che pare essere termine principale in ogni fattore della mia espressione.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+3}{5n^2+7n+11} = \frac{2}{5}$$

ovvero: $\frac{2n^2+3}{5n^2+7n+11} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{2}{5}$

NON ACCETTABILE: $\frac{2n^2+3}{5n^2+7n+11} = \frac{2}{5}$;

(a) perchè <u>falso</u>, (b) perchè a SX ho successioni a DX ho numero