Proprietà algebriche dei limiti a ∞.

Alcune cose si possono dire anche su somme, prodotto, rapporto di limiti quando una delle due successioni tende a $+\infty$ o $-\infty$.

Per esempio.

Teorema. Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$ e sia $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ e $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Allora
$$\exists \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

dim. Sia $R>0$ qualsiasi.

Poiché $a_n \to +\infty$, $\exists n_1 > 0 : \forall n \geq n_1 \Rightarrow a_n \geq R$

e poiché $b_n \to +\infty$, $\exists n_2 > 0 : \forall n \geq n_2 \Rightarrow b_n \geq R$.

Allora, $\forall n \geq \bar{n} := \max(n_1, n_2) \Rightarrow a_n + b_n \geq 2R \geq R$.

Ne concludo che $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ∎

Il Teorema si può scrivere nella suggestiva forma stenografica:

$$\boxed{+\infty + \infty = +\infty}$$

Gli altri Teoremi di ~~questo~~ questo tipo che coinvolgono le quattro operazioni sono i seguenti.

Teorema. (1) $+\infty + \infty = +\infty$

(2) $\forall m \in \mathbb{R}: \quad m + \infty = +\infty$

(3) $\forall c \in \mathbb{R}: c > 0 \Rightarrow \quad c \cdot (+\infty) = +\infty$

(4) $\forall c \in \mathbb{R}: c < 0 \Rightarrow \quad c \cdot (+\infty) = -\infty$

(5) $\forall c \in \mathbb{R}: \quad \dfrac{c}{+\infty} = 0$

(6) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

(7) $\forall c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}: \quad \dfrac{c}{0} = \infty$

(da leggere: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

e $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$: il limite di $\dfrac{a_n}{b_n}$ potrebbe non esistere).

Corollari (8) $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

dim (basta usare (6) e (4) con $c=-1$) ∎

(9) $-\infty - \infty = -\infty$

eccetera...

Esercizio: trascrivere (1) - (7) in Teoremi con ipotesi e tesi.

oss. Da (7) e dai Teoremi di confronto:

(10) Se $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \xrightarrow[n]{} 0$ e $b_n \xrightarrow[n]{} c > 0$, allora $\exists \lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = +\infty$.

Mancano alcuni casi:

(i) $+\infty - (+\infty)$
(ii) $\frac{0}{0}$
(iii) $\frac{+\infty}{+\infty}$
(iv) $0 \cdot \infty$

$\Big\}$ Forme di indeterminazione

Questi casi mancano perché <u>non esiste alcun Teorema</u> corrispondente.

(Es. i) Non esiste un teorema del tipo $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ $\Rightarrow a_n - b_n \to L$.

Infatti, l'esempio

$(i1)$ $a_n = 2n$, $b_n = n$, $a_n - b_n = n \to +\infty$ darebbe $\boxed{L = +\infty}$, mentre

$(i2)$ $a_n = n$, $b_n = 2n$, $a_n - b_n = -n \to -\infty$ darebbe $\boxed{L = -\infty}$, e ancora

$(i3)$ $a_n = n+1$, $b_n = n$, $a_n - b_n = 1 \to 1$ darebbe $\boxed{L = 1}$ e

$(i4)$ $a_n = n = b_n$; $a_n - b_n = 0 \to 0$ darebbe $\boxed{L = 0}$:

~~per l'unicità del limite~~
non è possibile stabilire $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ sapendo solo che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \lim_{n\to\infty} b_n$.

L'esempio:

$(i5)$ $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = n$, $a_n - b_n = (-1)^n$

assicura che neanche si può dire se il limite <u>esiste</u> sotto queste ipotesi.

Data la sua importanza, vediamo esempi per (ii).

(Es. ii)
(ii-1) $a_n = 1/n^2 \to 0$, $b_n = 1/n \to 0$ $\Big| \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0$

$(ii-2)$ $a_n = 1/n \to 0$, $b_n = 1/n^2 \to 0$ $\Big| \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = n \to +\infty$

$(ii-3)$ $a_n = 1/n = b_n \to 0$ $\Big| \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = 1 \to 1$

$(ii-4)$ $\underset{\downarrow\atop 0}{a_n = \frac{1}{n}}$; $\underset{\downarrow\atop 0}{b_n = \frac{(-1)^n}{n}}$ $\Big| \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$, che non ha limite.

~~L'Analisi è nata proprio per~~
L'Analisi Matematica nasce con <u>l'esigenza di capire alcune forme di indeterminazione.</u>