o-piccoli e asintotici.

Def. Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $\{a_n\}$ è o-piccolo di $\{b_n\}$
(scritto: $a_n = \underset{n\to\infty}{o}(b_n) = o(b_n)$)
se $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Proprietà degli o-piccoli.

(i) $a_n = o(b_n)$ e $b_n = o(c_n) \Rightarrow a_n = o(c_n)$
(ii) $a_n = o(b_n)$ e $c_n = o(d_n) \Rightarrow a_n c_n = o(b_n d_n)$
(iii) $a_n = o(b_n)$ $c_n \neq 0\ \forall n \Rightarrow a_n c_n = o(b_n c_n)$
(iv) $a_n = o(1) \Leftrightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
(v) $a_n = o(c_n)$ e $b_n = o(c_n) \Rightarrow a_n + b_n = o(c_n)$
(vi) $a_n = o(b_n)$ e $\{c_n\}$ limitata $\Rightarrow a_n c_n = o(b_n)$
(vii) $a_n = o(b_n)$ e $K \in \mathbb{R} \Rightarrow K a_n = o(b_n)$

Con le dovute cautele, possiamo sintetizzare:
(ii) $o(b_n) \cdot o(d_n) = o(b_n d_n)$
(iii) $c_n \cdot o(b_n) = o(c_n b_n)$, se $c_n \neq 0\ \forall n$
(iv) $o(1) \to 0$
(v) $o(c_n) + o(c_n) = o(c_n)$ (!)
(vi) $K \cdot o(b_n) = o(b_n)$

Dim. (i) $\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} \to 0 \cdot 0 = 0$ per Hp.
(ii) $\frac{a_n c_n}{b_n d_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{c_n}{d_n} \to 0 \cdot 0 = 0$ per Hp.
(iii) $\frac{a_n c_n}{b_n c_n} = \frac{a_n}{b_n} \to 0$ per Hp.
(iv) $a_n = \frac{a_n}{1} \to 0$ ~~per Hp~~ sse $a_n = o(1)$.
(v) $\frac{a_n + b_n}{c_n} = \frac{a_n}{c_n} + \frac{b_n}{c_n} \to 0 + 0 = 0$ per Hp.
(vi) Sia $|c_n| \le M\ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora,
$\left|\frac{a_n c_n}{b_n}\right| \le \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \cdot M \to 0 \cdot M = 0$ per Hp.
(vii) Si ponga $c_n = k$ in (vi) ∎

Oss. Dal fatto che $o(c_n) + o(c_n) = o(c_n)$
<u>non segue</u> che $o(c_n) = 0$;
così come $a_n = o(c_n)$ e $b_n = o(c_n)$
$\not\Rightarrow a_n = b_n$!

Esempi importanti.

(P) $\forall \alpha < \beta$ in $\mathbb{R}$: $n^\alpha = o(n^\beta)$: $\frac{n^\alpha}{n^\beta} = \frac{1}{n^{\beta-\alpha}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$
poiché $\beta - \alpha > 0$

(E) $\forall A > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = +\infty$

Quindi $\forall\, 0 < a < b$: $a^n = o(b^n)$,
poiché $\frac{a^n}{b^n} = \frac{1}{(b/a)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ perché $b/a > 1$

<u>Note</u>. Sappiamo che $\lim_{n\to\infty} n^1 = +\infty$.

Il fatto che $\forall \alpha > 0 : \lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty$ verrà dimostrato in seguito.

<u>Mostriamo che se $A > 1$</u> $\boxed{\lim_{n\to\infty} A^n = +\infty}$

~~La dimostrazione, modificata in maniera ovvia, mostra anche che~~

<u>dim.</u> Poiché $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$,

esiste $n(A) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(A) \Rightarrow 1 < \frac{n+1}{n} < A$.

Quindi, $\forall m \geq 1$

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ volte}} >$$

$$> \frac{n(A)+1}{n(A)} \cdot \frac{n(A)+2}{n(A)+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n(A)+m}{n(A)+m-1}$$

$$= \frac{n(A)+m}{n(A)} \xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty,$$ essendo $n(A)$ fissato.

Per confronto, $A^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$ ∎

Raffinando di poco la dimostrazione, si trova che

(*) $\boxed{\forall A > 1 \cdot \forall \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{A^n} = 0}$

cioè: $\forall A > 1 \; \forall \alpha \in \mathbb{R} : n^\alpha = o(A^n)$

Come conseguenza:

$\boxed{\forall 0 < B < 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} B^n \cdot n^\alpha = 0}$

Infatti, $B^n \cdot n^\alpha = \frac{n^\alpha}{(1/B)^n}$ e $\frac{1}{B} > 1$.

<u>Dimostro (*) con $\boxed{A = 2 \text{ e } \alpha = 1}$</u>

(Se $\alpha < 0$, (*) è banale. Perché?).

Scrivo $\frac{n}{2^n} = \frac{n}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ volte}}} = \frac{\frac{n}{n-1}}{2} \cdot \frac{\frac{n-1}{n-2}}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{2}{1}}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ∎

(lo posso fare perché si semplificano i fattori $n-1, n-2, \ldots, 3, 2$ al numeratore)

Ora, $\frac{m}{m-1} \leq \frac{3}{2}$ se $m \geq 3$,

quindi solo i numeratori degli ultimi due fattori possono essere $> 3/2$. Allora

$$0 < \frac{n}{2^n} \leq \underbrace{\frac{3/2}{2} \cdot \frac{3/2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{3/2}{2}}_{n-2 \text{ volte}} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ ∎

uso il Teorema dei 2 carabinieri

Esempio. $a_n = \dfrac{(n^2+2n+1)^5 + (3n^5+n^3-n-1)^2}{(4n+1)^{10}}$

Posso scrivere: ~~$a_n = (n^2+o(n^2))^5$~~

$$a_n = \frac{(n^2+o(n^2))^5 + (3n^5+o(n^5))^2}{(4n+o(n))^{10}}$$

$$= \frac{[n^2(1+o(1))]^5 + [n^5(3+o(1))]^2}{[n\cdot(4+o(1))]^{10}}$$

$$= \frac{n^{10}\cdot(1+o(1)) + n^{10}\cdot(3^2\cdot 1+o(1))}{n^{10}\cdot(4^{10}+o(1))}$$

$$= \frac{1+o(1)+3^2+o(1)}{4^{10}+o(1)} = \frac{10+o(1)}{4^{10}+o(1)}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{10}{4^{10}} = \frac{5}{2^{19}} \; : \; \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{2^{19}}.$$

Ho usato, p. es., $(3+o(1))^2 = 3^2 + o(1)$:

Infatti, $(3+o(1))^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 3^2$, quindi

$(3+o(1))^2 = 3^2 + o(1)$.

Esempio che dovrebbe insultare e contrita.

$$a_n = \frac{(n^2+1)^2 - (n^2+3)^2}{n^3}$$

Sviluppo il numeratore:

$(n^2+1)^2 - (n^2+3)^2 = (n^2+o(n^2))^2 - (n^2+o(n^2))^2$

$= n^4 + o(n^4) - (n^4 + o(n^4))$

$= o(n^4)$ [non posso dire $o(n^4) - o(n^4) = 0$!].

Quindi $a_n = \dfrac{o(n^4)}{n^3} = \dfrac{n^4}{n^3}\cdot o(1) = n\cdot o(1)$

È questa una forma di indeterminazione $\infty\cdot 0$ [$n\to\infty$, $o(1)\to 0$!].

Sono bloccato! Torno indietro e non uso gli o-piccoli così rozzamente:

$(n^2+1)^2 - (n^2+3)^2 = n^4+2n^2+1 - (n^4+6n^2+9)$

$= -4n^2 + o(n^2)$, quindi

$$a_n = \frac{-4n^2+o(n^2)}{n^3} = \frac{-4+o(1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Esercizio: calcolare $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)^2-(n^2+3)^2}{n^{n}}$

con $n = 1, 2, 3, 4$

Successioni asintoticamente equivalenti

Df. Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$.
$\{a_n\}$ è asintoticamente equivalente a $\{b_n\}$ se
$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Lo scrivo: $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ o $a_n \sim b_n$.

Proprietà di $\sim$.

(i) $a_n \sim a_n$
(ii) $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$
(iii) $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$
(iv) $a_n \sim b_n$ e $c_n \sim d_n \Rightarrow a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot d_n$
(v) $a_n \sim b_n$ e $c_n \sim d_n \Rightarrow \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$
(vi) $a_n \sim b_n \Rightarrow \left(\underset{\text{in } \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}}{\exists \lim_{n\to\infty} a_n} \Leftrightarrow \underset{\text{in } \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}}{\exists \lim_{n\to\infty} b_n} \right)$

e se i limiti esistono, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(vii) $a_n \sim b_n$ e $\{a_n\}$ limitata $\Rightarrow \{b_n\}$ limitata.

dim. (i) $\frac{a_n}{a_n} = 1 \to 1$

(ii) $\frac{a_n}{b_n} \to 1 \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{-1} \to \frac{1}{1} = 1$

(iii) $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ e $\frac{b_n}{c_n} \to 1 \Rightarrow \frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} \to 1 \cdot 1 = 1$

(iv) $\frac{a_n \cdot c_n}{b_n \cdot d_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{c_n}{d_n} \to 1 \cdot 1 = 1$ per Hp.

(v) $\frac{a_n}{c_n} : \frac{b_n}{d_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{c_n}{d_n} \to 1 \cdot 1 = 1$ per Hp.

(vi) Se $a_n \to L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, allora
$b_n = \frac{b_n}{a_n} \cdot a_n \to 1 \cdot L = L$ per Hp.

(vii) Se $|a_n| \le M$ $\forall n$, allora
$$|b_n| = \left|\frac{b_n}{a_n}\right| \cdot |a_n| \le M \cdot \left|\frac{b_n}{a_n}\right|$$
e $\left|\frac{b_n}{a_n}\right|$ è limitata poiché (per Hp) è convergente. ∎

Attenzione! Gli asintotici si comportano male rispetto alla somma:
$$a_n \sim b_n \not\Rightarrow a_n + c_n \sim b_n + c_n.$$
P. es. $a_n = n+1$, $b_n = n-1$, $c_n = -n$:
$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{n-1} \to 1$, ma $a_n + c_n = 1 \to 1$
e $b_n + c_n = -1 \to -1$

quindi (per (vi)): $a_n + c_n \not\sim b_n + c_n$.

Esercizio. Segnare ~~guardate~~ nelle caselle vuote quali relazioni tra $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sono vere e quali false.

a_n	b_n	c_n	$a_n \sim b_n$	$a_n + c_n \sim b_n + c_n$
n	$2n$	n^2		
$1/n^2$	$1/n^3$	$1/n$		
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n}{n-1}$	$1/n$		
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n}{n-1}$	-1		
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n}{n-1}$	1		
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n}{n-1}$	n		
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n^2}{n^2-1}$	1		
$\frac{n^2-1}{n}$	$\frac{n^2}{n-1}$	1		

Esempio. Sia $a_n = \dfrac{(n2^n + 3^n)(2^n + n^2)}{6^{n+2} + n^2 3^n}$

Analizzo i fattori separatamente:

- $2^n + n^2 = 2^n + o(2^n) = 2^n(1 + o(1)) \sim 2^n$
  poiché $n^2/2^n \to 0$
- Confronto $n \cdot 2^n$ e 3^n:
  $$\frac{n \cdot 2^n}{3^n} = n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{perché } 0 < \frac{2}{3} < 1$$
  $$\Rightarrow n2^n + 3^n = 3^n + o(3^n) = 3^n(1 + o(1)) \sim 3^n$$
- Come sopra, $\dfrac{n^2 \cdot 3^n}{6^{n+2}} = \dfrac{n^2 \cdot 3^n}{6^2 \cdot 6^n} =$
  $$= \frac{n^2}{6} \cdot \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ quindi}$$
  $$6^{n+2} + n^2 3^n = 36 \cdot 6^n + n^2 3^n =$$
  $$= 36 \cdot 6^n + o(6^n) = (36 + o(1))\, 6^n$$

Tutto sommato:
$$a_n \sim \frac{3^n \cdot 2^n}{36 \cdot 6^n} = \frac{6^n}{36 \cdot 6^n} = 1 \to \frac{1}{36}$$

Cioè $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{36}}$