Domande varie (V o F) su uguaglianze, disuguaglianze e valori assoluti (Rispondere se siano vere o false).
Se l'affermazione è falsa, trovare un controesempio.

V (1) $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad a < b \Rightarrow -b < a < b$

F (2) $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad a < b \Rightarrow |a| < |b|$

F (3) $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad a < b \Rightarrow |a| \neq |b|$

F (4) $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad |a| < |b| \Leftrightarrow -b < a < b$

V (5) $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad |a| < |b| \Leftrightarrow -|b| < a < |b|$

F (6) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a > -a$

F (7) $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

F (8) $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$

V (9) $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad a < b \Rightarrow a^3 < b^3$

F (10) $\forall a,b \in \mathbb{R}: \quad a^3 < b^2 \Rightarrow a < b$

F (11) $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: \quad a > 1/a$

F (12) $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: \quad a > 0 \Rightarrow a > 1/a$

F (13) $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: \quad |a| > 1 \Rightarrow a > 1/a$

° (14) Trovare tutti gli $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: a > 1/a$

F (15) $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: a + |a| > 0$

F (16) $\forall a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: \quad a < b \Rightarrow 1/a < 1/b$

F (17) $\forall a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: b > 0$ e $a < b \Rightarrow 1/a < 1/b$

° (18) Trovare tutte le coppie $(a,b) \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

V (19) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad 2|a| \leq |a+1| + |a-1|$

F (20) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad |a| < |a+1|$

V (21) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a < a+1$

V (22) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad ||a|| = |a|$

F (23) $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: |a| > a$

F (24) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad \sqrt{a^2} = a$

F (25) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad \sqrt{a^2} = -a$

V (26) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad \sqrt{a^2} = |a|$

° (27) Trovare tutti gli $a \in \mathbb{R}: |a-1| + 1 = a$

V (28) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad \sqrt{a^4} = a^2$

V (29) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad |a|^2 = a^2$

F (30) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad |a|^3 = a^3$

F (31) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a^2 \geq a$

V (32) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad |a| \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq a$

V (33) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad -1 \leq a \leq 0 \Rightarrow a^2 \geq a$

F (34) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a^3 > a \Rightarrow a^2 > a$

° (35) Trovare tutti gli $a \in \mathbb{R}: \quad a^2 \geq a$

° (36) Trovare tutti gli $a \in \mathbb{R}: \quad a^3 \geq a$

F (37) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a^2 > a \Rightarrow a^3 > a$

F (38) $\forall a \in \mathbb{R}: \quad a > 0 \Rightarrow a^3 \geq a^2$

° (39) Trovare tutti gli $a \in \mathbb{R}: \quad a^3 \geq a^2$

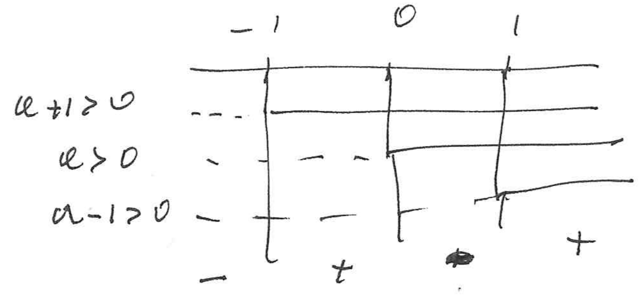
V (40) $\forall a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0: \quad a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 0$

V (41) $\forall a,b > 0: \quad a > b \Leftrightarrow 1/a < 1/b$

V (42) $\forall a,b > 0: \quad a > b \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{a}} > \frac{1}{1+\frac{1}{b}}$

° (43) Trovare tutti gli $a > 0$: $\frac{1}{1+ [illegible]} > \frac{1}{1+ [illegible]}$

(14) $a \neq 0$: $\quad a > \frac{1}{a} \iff 0 < a - \frac{1}{a} = \frac{a^2-1}{a} = \frac{(a+1)(a-1)}{a}$



$\iff a > 1$ o $-1 < a < 0$

(18) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ con $a \neq 0 \neq b$. $\quad 0 < \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{a \cdot b}$

Vero se $a < 0$ e $b > 0$

Vero se $a > 0$ e $b > 0$ e $b < a$

Vero se $a < 0$ e $b < 0$ e $b \leq a$

(27) $|a-1| + 1 = a$ ~~:~~

$\iff |a-1| = a-1 \iff a-1 \geq 0 \iff a \geq 1$

(35) $a^2 \geq a \iff 0 \leq a^2 - a = a \cdot (a-1)$

$\iff a \leq 0$ o $a \geq 1$

(36) $a^3 \geq a \iff 0 \leq a^3 - a = a(a^2-1) = a(a-1)(a+1)$

$\iff -1 \leq a \leq 0$ o $a \geq 1$

(39) $a^3 \geq a^2 \iff 0 \leq a^3 - a^2 = a^2 \cdot (a-1)$

$\iff a = 0$ o $a \geq 1$

(43) Trovare $a > 0$: $\quad \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{a}}} > \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}$

$\iff 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{a}} < 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{3}} \iff \dfrac{1}{1+\frac{1}{a}} < \dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}$

$\iff 1 + \frac{1}{a} > 1 + \frac{1}{3} \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{3} \iff a < 3$:

$0 < a < 3$

Alcuni esercizi di tipo vero/falso sulle successioni.

(1) Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$ e supponiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = -1$.
Quali delle seguenti affermazioni seguono necessariamente dalle ipotesi?

(i) $\exists R>0 : \forall n\in\mathbb{N}: \ n\geq R \Rightarrow a_n \leq -1/2$

(ii) $\forall R>0 \ \exists n\in\mathbb{N}: \ n\geq R$ e $a_n \leq -1/2$

(iii) $\exists R>0 \ \forall n\in\mathbb{N}: n\geq R \Rightarrow a_n \leq -1$

(iv) $\exists n\in\mathbb{N} : a_n \leq -1$

(v) $\exists R>0 : \forall n\in\mathbb{N} : n\geq R \Rightarrow a_n \geq -2$

(vi) non esiste $n\in\mathbb{N} : a_n \geq 0$

(vii) esiste $n\in\mathbb{N} : a_n \geq 0$

(viii) $\{a_n\}$ è limitata superiormente

(ix) $\{a_n\}$ è limitata.

(quattro sono vere e quattro sono false).

(2) Quale delle seguenti non è equivalente a dire che $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$?

(i) $\forall \varepsilon>0 \ \exists R\in\mathbb{R} : \forall n\in\mathbb{N} \ n\geq R \Rightarrow |a_n+1|<\varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon>0 \ \exists R<0 : \forall n\in\mathbb{N} \ n\geq R \Rightarrow |a_n+1|<\varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon>0 \ \exists R>0 : \forall n\in\mathbb{N} \ n\geq R \Rightarrow |a_n+1|<2\varepsilon$

(iv) $\forall \varepsilon>0 \ \exists R>0 : \forall n\in\mathbb{N} \ |a_{n+1}+1|<\varepsilon$

---

(1) (i) V; (ii) V; (iii) F; (iv) F; (v) V; (vi) F;
(vii) F; (viii) V; (ix) V

(2) La (ii) non è equivalente, le altre lo sono.

Esercizio. Segnare ~~quadrate~~ nelle caselle vuote quali relazioni tra $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sono vere e quali false.

a_n	b_n	c_n	$a_n \sim b_n$	$a_n + c_n \sim b_n + c_n$
n	$2n$	n^2	F	V
$1/n^2$	$1/n^3$	$1/n$	F	V
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n}{n-1}$	$1/n$	V	V
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n}{n-1}$	-1	V	F
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n}{n-1}$	1	V	V
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n}{n-1}$	n	V	V
$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n^2}{n^2-1}$	1	V	F
$\frac{n^2-1}{n}$	$\frac{n^2}{n-1}$	1	V	V

① 3 ② 1 ③ 8/27 ④ 0 ⑤ $\frac{5^3}{9^2} = \frac{125}{81}$

⑥ 1/2 ⑦ 16 ⑧ 2x ⑨ k=2.

Alcuni limiti

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+3}$

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(2n+3)^2}{5n^2+9n+8}$

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(4n^2-n-25)}{\cancel{7}(3n-7)^3}$

④ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

⑤ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{[(2n+1)^2+n^2]^3}{[(2n+1)^3+n^3]^2}$

⑥ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}$

⑦ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2-(2n-3)^2}{n}$

⑧ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(x+\frac{1}{n})^2-x^2}{\frac{1}{n}}$ (con $x\in\mathbb{R}$ fissato)

⑨ Trovare $k\in\mathbb{N}$: $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^k} \neq 0$ (in $\mathbb{R}$