Limiti di successioni monotòne.

Def. Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.
$\{a_n\}$ è monotona se

(C) è crescente: $\forall n\in\mathbb{N}: a_n \le a_{n+1}$
oppure se
(D) è decrescente: $\forall n\in\mathbb{N}: a_n \ge a_{n+1}$

Teorema (1) Sia $A\subseteq\mathbb{R}$ un insieme.

(1) Se A è superiormente limitato
(cioè, se $\exists M\in\mathbb{R}: \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow a_n \le M$)
allora
$\forall \varepsilon>0\ \exists x\in A:\ \sup A-\varepsilon < x \le \sup A$.

(2) Se A è illimitato superiormente, allora
$\forall R>0\ \exists x\in A:\ R<x$.

Esercizio. Scrivere l'enunciato del teorema per insiemi inferiormente limitati/illimitati.

Dim. (1) Sia $A\subseteq\mathbb{R}$ superiormente limitato e sia $\varepsilon>0$. Se fosse $\forall x\in A: x\le \sup A-\varepsilon$, allora $\sup A-\varepsilon$ sarebbe un maggiorante di A, quindi avrei
$\sup A \le \sup A-\varepsilon$, assurdo.

(2) Sia $A\subseteq\mathbb{R}$ sup. illim. e sia $R>0$. Se $\forall x\in A: x<R$, allora ~~$\sup A\in\mathbb{R}$~~ A sarebbe sup. limitato: assurdo ∎

Teorema (2) (limiti delle successioni monotone)

(1) Sia $\{a_n\}$ una successione crescente in $\mathbb{R}$.
Allora $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. $\boxed{A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}}$
In particolare:

(1.1) $\{a_n\}$ crescente e limitata
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A\in\mathbb{R}$

(1.2) $\{a_n\}$ crescente e illimitata
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A = +\infty$

(2) Sia $\{a_n\}$ una successione decrescente in $\mathbb{R}$.
Allora, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. $\boxed{A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}}$
In particolare,

(2.1) $\{a_n\}$ decrescente e limitata
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A\in\mathbb{R}$

(2.2) $\{a_n\}$ decrescente e illimitata
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A = -\infty$

OSS. Se $\{a_n\}$ è crescente, allora è inferiormente limitata:
$\forall n\in\mathbb{N}: a_n \ge a_0 = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$.
Allo stesso modo, $\{a_n\}$ decresc. $\Rightarrow$ è sup. limitata.

Dimostrazione del Teorema (2).

(1.1) Sia $\{a_n\}$ crescente e limitata.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per il Teo. precedente,

$\exists\, n_\varepsilon : \sup\{a_n\} - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq \sup\{a_n\}$.

Essendo $\{a_n\}$ crescente:

$\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup\{a_n\} - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq \sup\{a_n\}$

e, in particolare

$\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |\sup\{a_n\} - a_n| \leq \varepsilon$, come si voleva ■

(1.2) Sia $\{a_n\}$ crescente e illimitata.

Fisso $R > 0$. Per il Teo. precedente,

$\exists\, n_R : a_{n_R} \geq R$.

Essendo $\{a_n\}$ crescente:

$\forall n \geq n_R \Rightarrow a_n \geq a_{n_R} \geq R$, quindi

$\forall n \geq n_R \Rightarrow a_n \geq R$ come desiderato. ■

I casi (2.1) e (2.2) sono simili ■

Dal Teorema 1 deduciamo anche:

Teorema 3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme $A \neq \emptyset$.

Allora (i) esiste una successione $\{a_n\}$ in A: $\{a_n\}$ è crescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

(ii) esiste una successione $\{a_n\}$ in A: $\{a_n\}$ è decrescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A$.

Dim. del Teorema (3). Mostro (i).

Supponiamo che $\sup A \in \mathbb{R}$. Per Teo. 2,

$\exists\, a_1 \in A : \sup A - 1 \leq a_1 \leq \sup A$

~~Inoltre $\exists\, b_2 \in A$: $\sup A - \frac{1}{2} \leq b_2 \leq \sup A$.~~

~~Se $b_2 \geq a_1$, pongo $a_2 = b_2$~~

Se ~~$b_2 < a_1$, pongo~~ sempre per Teo. 2,

$\exists\, a_2 \in A : \mathrm{MAX}(\sup A - \frac{1}{2}; a_1) \leq a_2 \leq \sup A$,

così che $a_2 \geq a_1$. (Se $a_1 = \sup A$, pongo $a_2 = a_1$).

Se ho scelto $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ con

$\mathrm{MAX}(\sup A - \frac{1}{2^k}; a_k) \leq a_{k+1} \leq \sup A$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$

(pongo $a_0 = \sup A - 1$),

posso trovare $a_{n+1} \in A$:

$\mathrm{MAX}(\sup A - \frac{1}{2^n}; a_n) \leq a_{n+1} \leq \sup A$.

(Se $a_n = \sup A$, pongo $a_{n+1} = a_n$).

La successione $\{a_n\}$ sta in A, cresce e $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$, poiché $|\sup A - a_n| \leq 1/2^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ■

Supponiamo che $\sup A = +\infty$. Prendo $a_0 \in A$ qualsiasi.

A illimitato $\Rightarrow \exists\, a_1 \in A : a_1 > \mathrm{MAX}(a_0, 0)$

Se ho scelto $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ in A,

A illimitato $\Rightarrow \exists\, a_{n+1} \in A : a_{n+1} > \mathrm{MAX}(a_n, n)$

La successione $\{a_n\}$ è crescente

$a_n \geq n - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \sup A$ ■