Cenni di calcolo combinatorio.

Sia $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme con n elementi. Una permutazione degli elementi di A_n è una n-upla ordinata $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in cui ogni elemento di A_n appare una (quindi, una sola) volta.

Esempio: $A_3 = \{a, b, c\}$.
Le permutazioni di A_3 sono
$(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)$.

Oss. Le permutazioni di A_n possono essere pensate come altrettante maniere di ordinare gli elementi di A_n.

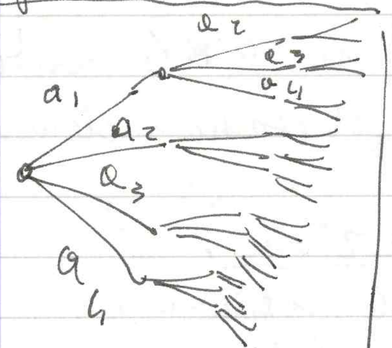
Def. Definiamo la successione fattoriale, $n \mapsto n!$ $(n \in \mathbb{N})$, come segue:

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2 \cdot 1$
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Oss. $n! = n \cdot (n-1)!$
(la successione può essere definita induttivamente).

Proprietà. Gli elementi di un insieme con n elementi possono essere ordinati in esattamente $n!$ permutazioni.

Dim. Siano $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ l'insieme e $(x_1, \dots, x_n)$ una sua permutazione generica.



Caso $n = 4$

- x_1 lo possiamo scegliere in n modi
- per ogni scelta di x_1, possiamo scegliere x_2 in $(n-1)$ modi
- per ogni scelta di x_1 e di x_2 possiamo scegliere x_3 in $(n-2)$ modi

Eccetera...

Abbiamo quindi:
n scelte per x_1
$n \cdot (n-1)$ scelte per x_1 e x_2
$n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ scelte per x_1 e x_2 e x_3
...
$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ scelte per x_1 e ... e x_n ■

Corollario della dimostrazione. Posso il numero delle k-uple $(1 \le k \le n)$ che possiamo fare con n elementi è $\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

Problema. Quanti sottoinsiemi con k elementi ha un insieme di n elementi?

Risposta: $\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} \stackrel{\text{df.}}{=:} \dbinom{n}{k}$ coefficiente di Newton.

Abbiamo $\dbinom{n}{0}=1$ (solo $\emptyset$ ha 0 elementi!)

e $\dbinom{n}{n}=1$ (solo A_n stesso ha n elementi!).

Motivazione/Dimostrazione.

Sia $A_n=\{a_1,\dots,a_n\}$ l'insieme.
So che posso fare $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ k-uple ordinate con gli elementi di A_n. Per ogni insieme di k elementi, esistono esattamente $k!$ k-uple formate con quegli elementi. Quindi:

$$\frac{n!}{(n-k)!}=\left(\begin{array}{c}\text{Numero degli insiemi}\\ \text{con } k \text{ elementi in } A_n\end{array}\right)\cdot k!$$

da cui, dividendo,

$$\left(\begin{array}{c}\text{Numero degli insiemi}\\ \text{con } k \text{ elementi in } A_n\end{array}\right)=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \quad \blacksquare$$

Esempio. Con un'ottava (13 toni) si possono produrre $\dbinom{13}{3}=\dfrac{13!}{10!\,3!}=286$ accordi di 3 note (non so quanti abbiano musicalmente senso).

Potenze di un binomio.

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}\cdot 1+\binom{n}{1}\cdot x+\binom{n}{2}\cdot x^2+\dots+\binom{n}{k}x^k+\dots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n.$$

Lo verifico per $n=5$.

$$(1+x)^5=\left.\begin{array}{l}(1+x)\cdot\\(1+x)\cdot\\(1+x)\cdot\\(1+x)\cdot\\(1+x)\end{array}\right\}$$

Svolgendo il prodotto con le proprietà distributiva trovo $2\times2\times2\times2\times2=2^5=32$ addendi del tipo x^k $(0\le k\le 5)$.

x^0: in nessun fattore ho scelto x (1 caso)

x^1: in 1 fattore solo ho scelto x (5 casi)

x^2: in 2 fattori soli ho scelto x (cioè, ho un x^2 per ogni scelta di 2 fattori tra i 5 che ho: $\binom{5}{2}$ casi)

x^3: ne ho uno per ogni insieme di 3 fattori contenuto nel mio insieme di 5 fattori ($\binom{5}{3}$ casi).

E così per x^4 e x^5. $\blacksquare$

Posso estendere la definizione di $\binom{n}{k}$ ai casi $k<0$ e $k>n$ ponendo $\binom{n}{k}=0$ (A_n non ha sottoinsiemi con più di n o meno di 0 elementi).

Def. Pongo $\binom{0}{0}=1$ ($\emptyset$ ha un sottinsieme con 0 elementi)

<u>Proprietà</u>:

(1) $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}: 0\le k\le n$, ho
$$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$$

(2) $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}: 0\le k\le n$, ho
$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

(3) $\forall n\in\mathbb{N}: \binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$.

Con (2) e (3) possiamo costruire il <u>triangolo di Newton</u>

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & 0 & & 1 & & 0 & & & & \\
n=1 & & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & \\
n=2 & & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & \\
n=3 & 0 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 & \\
n=4 & 0 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 0
\end{array}$$
e così via...

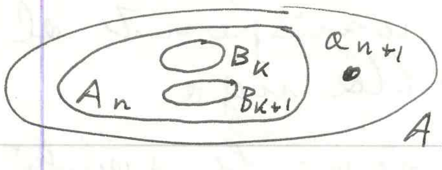
- Per n fissato, $k=0$ corrisponde al primo coeff. $\neq 0$ sulla riga.
- I trattini evidenziano le applicazioni della regola (2):
$$\begin{array}{ccc} 3 & & 3 \\ & 6 & \end{array} \text{ sta per } \underbrace{\binom{3}{1}}_{=3}+\underbrace{\binom{3}{2}}_{=3}=\underbrace{\binom{4}{2}}_{=6}$$

<u>Dim.</u> delle proprietà.

(1) Il numero degli insiemi con k elementi in A_n (le scelte di k elementi che ho preso) è uguale al numero degli insiemi con $(n-k)$ elementi in A_n (le scelte degli $(n-k)$ elementi che <u>non</u> ho preso).

Più formalmente, sia $\mathcal{P}_k(A_n)$ l'insieme avente come elementi i sottoinsiemi con k elementi in A_n. Considero la funzione
$$\Lambda: \mathcal{P}_k(A_n) \longrightarrow \mathcal{P}_{n-k}(A_n)$$
$$B \longmapsto A_n\setminus B$$
è una funzione biunivoca (Esercizio: dimostrarlo!), quindi $\mathcal{P}_k(A_n)$ e $\mathcal{P}_{n-k}(A_n)$ hanno lo stesso numero di elementi.

(3) Formo A_{n+1} aggiungendo l'elemento a_{n+1} ad A_n.



Preso un insieme C_{k+1} con $(k+1)$ elementi in A_{n+1} ci sono due possibilità:

(i) $C_{k+1} = B_{k+1} \subseteq A_n$ (se $a_{n+1} \notin C_{k+1}$):
C_{k+1} è un sottinsieme di A_n con $(k+1)$ elementi

(ii) $C_{k+1} = B_k \cup \{a_{n+1}\}$ (se $a_{n+1} \in C_{k+1}$):
C_{k+1} contiene a_{n+1} e un insieme $B_k \subseteq A_n$ con k elementi.

Il numero dei C_{k+1}, quindi, è la somma del numero di B_{k+1} e di quello dei B_k:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \quad \boxtimes$$

Nota. (1) e (2) si possono anche dimostrare manipolando numericamente l'espressione

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$ [p.es., (1) diventa banale].

Nota. (1) e (2) possono essere mostrate per induzione.

Se pongo $x=1$ nella formula di Newton, ottengo l'interessante formula:

$$\boxed{2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}$$

P. es. $n=2$: $1+2+1 = 2^2$

$n=3$: $1+3+3+1 = 2^3$

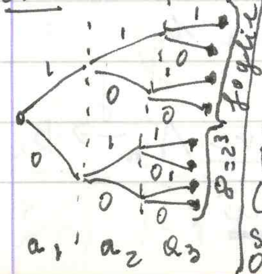
$n=4$: $1+4+6+4+1 = 2^4$... eccetera.

Il numero a destra di (=) dà il numero di tutti i sottoinsiemi di A_n aventi 0, o 1, o 2, ..., o n elementi; cioè il numero di tutti i sottinsiemi di A_n.

Proprietà. Sia A_n un insieme con n elementi e sia $\mathcal{P}(A_n) = \{A : A \subseteq A_n\}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A, incluso ϕ ($\mathcal{P}(A_n)$ è l'insieme delle parti di A_n). Allora, $\mathcal{P}(A_n)$ ha 2^n elementi.

Esempio $A_2 = \{a, b\}$ e $\mathcal{P}(A_2) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ ha $2^2 = 4$ elementi.

Oss.



La dimostrazione segue, abbiamo visto, dalla formula di Newton. Se ne può dare un'altra: considero un albero binario con tante diramazioni quanti elementi ($n=3$ in figura). A ogni diramazione scelgo 1 se prendo l'elemento, 0 altrimenti. Ogni foglia rappresenta un sottinsieme di A_n

Alcuni problemi di conteggio.

(1) Sia A_n un insieme con n elementi e sia B_k un insieme con k elementi. Quante sono le funzioni $A_n \xrightarrow{f} B_k$?

Risposta: k^n.

Infatti, sia $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Allora $f(a_1)$ può essere scelto in k modi;

$f(a_2)$ può essere scelto in k modi;

... $f(a_n)$ può essere scelto in k modi:

possiamo costruire f in

$\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n \text{ volte}} = k^n$ modi diversi.

(2) Se poniamo $k=2$ in (1), abbiamo che esistono 2^n funzioni $f: A_n \to \{0,1\}$; lo stesso numero dei sottoinsiemi di A_n! Trovare una "spiegazione" di questo fatto.

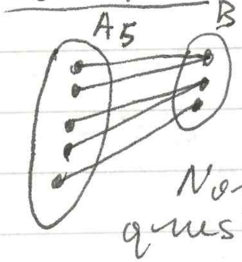
(3) Se poniamo $k=n$ in (1), abbiamo che esistono n^n funzioni $A_n \xrightarrow{f} A_n$.

(4) Le funzioni biunivoche $A_n \xrightarrow{f} A_n$ sono in numero di $n!$, come le permutazioni. Perchè?

(5) Se $k \geq n$, le funzioni iniettive $A_n \xrightarrow{f} B_k$ sono in numero $\frac{k!}{(n-k)!}$. Perchè?

(6) Più complesso è il conteggio delle funzioni suriettive da A_n a B_k con $k \leq n$.

Esempio



Non conosco belle formule per questo conteggio. Quello che so è:

Sia $C(n,k)$ il numero delle mappe suriettive da A_n a B_k. Allora

(i) $C(n,1) = 1$ (tutti gli a_j vanno in b_1)

(ii) $C(n,n) = n!$ (sono le permutazioni)

(iii) $C(n,k) = 0$ se $k > n$ (nessuna suriezione!)

(iv) $C(n,2) = 2^n - 2$ (sono tutte le mappe non costanti)

(V) $C(n+1, k+1) = (k+1) \cdot [C(n,k+1) + C(n,k)]$

(si vede cosa succede a $f: A_{n+1} \to B_{k+1}$ quando si toglie a_{n+1} da A_{n+1}).

Da (i), (iii), (V) si costruisca la tabella di $C(n,k)$

6	0	0	0	0	0	720	(1800 + 720) x 6
5	0	0	0	0	120	1800	(1560 + 1800) x 5
4	0	0	0	24	240	1560	(340 + 1560) x 4
3	0	0	6	36	150	340	(62 + 340) · 3
2	0	2	6	14	30	62	(62 + 1) · 2
1	1	1	1	1	1	1	1
k \ n	1	2	3	4	5	6	

Chiedrò lumi ai colleghi che si occupano di combinatoria