Ancora sulle "gerarchie" degli infiniti

(1) $\forall A>0:\ A^n = o(n!)$

(2) $n! = o(n^n)$

dim. (1) Pongo $A=2$ per semplicità.

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\cdot 2}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} \quad (n \text{ volte})$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{2}\cdot 2$$

$$\leq \frac{2}{n}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 2 = \frac{4}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Per T. dei 2 carab., $\dfrac{2^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

OSS. Abbiamo visto che $\dfrac{2^n}{n!} \leq \dfrac{4}{n}$ $(n\geq 1)$

Verificate che $\dfrac{2^n}{n!} \leq \dfrac{8}{n^2-n}$ $(n\geq 2)$.

(2) $$\frac{n!}{n^n} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\cdot n} \leq$$

$$\leq 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0;$$

uso T. 2 carab. ∎

Un limite ad hoc

$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$? Indeterminazione $\infty-\infty$.

Uso l'algebra: $(A-B)(A+B) = A^2-B^2$.

Ho che $$a_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0}$$

Esercizi (variazioni sul tema):

(1) Vero o falso? $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{1}{2}$

(è un limite $\infty\cdot 0$; sappiamo ora!)

(2) Calcolare $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$ (Tipo $0/0$)

(3) Mostrare che $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3-B^2$ e usare ciò per calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\cdot(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$

(4) Vero o falso? $a_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Esercizi sui limiti di successioni.

(1) Quali delle seguenti relazioni sono vere?

(i) $\frac{4^n}{n^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(ii) $(n+1)! \sim n!$

(iii) $n! = o((n+1)!)$

(iv) $(n+1)!\,(n-1)! \sim (n^2-1)!$

(v) $(n+1)!\,(n-1)! \sim (2n)!$

(vi) $(n+1)!\,(n-1)! \sim (n!)^2$

(vii) $(2n)! \sim (n!)^2$

(viii) $(n+1)!\,(n-1)! \geq (n!)^2 \quad \forall n \geq 1.$

(ix) $n^{n/2} = o(n!)$

(x) $5^n = o(2^{n^2})$

(2) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$ (se esiste) con

(i) $a_n = \frac{n\cdot 2^n + 3^n}{2^{2n}}$ (ii) $a_n = \frac{\sqrt{2+1/n} - \sqrt{2}}{1/n}$

(iii) $a_n = \frac{2\cdot n \cdot n! + 5\cdot 3^n}{7(n+1)! + n\cdot n!}$

(iv) $a_n = [1+(-1)^n]^n$

(v) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$

(3) Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\exists \lim_{n\to\infty}\left(n^\alpha\cdot\left(\sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2}\right)\right) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(e calcolare il limite)

(ii) $(n+\alpha)! \sim n!\,\alpha^n$ (con $\alpha \in \mathbb{N}$)

(iii) $(n+\alpha)! \sim n!\,n^\alpha$ (con $\alpha \in \mathbb{N}$)

(iv) $\frac{n\cdot(n+\alpha)!}{(n+3)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R},\ L \neq 0$

(v) $\frac{n^\alpha + 2^{\alpha n}}{(n+2^n)^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R},\ L \neq 0.$

(4) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n}}{2^{3n}}$

(5) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n)^3}{n^2}$

(6) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ non esiste

$\lim_{n\to\infty} (1+(-1)^n)\,n^\alpha$?