(1) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^2 - 2iz - 2)\cdot(iz^5 + 2 + i) = 0$$

Quante soluzioni hanno parte immaginaria positiva?

(2) Calcolare il limite di successioni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 5^{2n+4} + n \cdot 2^{6n+1} + 4^{3n+3}}{n \cdot 4^{3n+2} + 2^{6n+2}}$$

(3') Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)\cdot\cos(2x)\cdot\log(2-\cos(3x))}{(e^{\sin(2x)}-1)\cdot(e^{\sin(2x)}+1)\cdot(\sqrt{1+x^2}-1)}$$

(3'') Calcolare il limite

$$M = \lim_{x\to 2^+} \log\left(\frac{x^5-2x^4+x^2+x-6}{x^2-4}\right)$$

(4) Sia $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ tale che $f(1) = f(0) - 2$.
Ne segue che

(a) $\exists x \in [0,1] : f(x) = x$

(b) f è decrescente in $[0,1]$

(c) f non è decrescente in $[0,1]$

(d) $\exists x \in [0,1] : f(x) = f(1) + x$

~~(5) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescenti. Allora:~~

(5) Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot \left[\log(n^2 + n^\alpha) - 2\log n\right] \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

(6) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, decrescenti.

Quali delle seguenti segue dalle ipotesi?

(a) $g \circ f$ è decrescente in $\mathbb{R}$

(b) $g \circ f$ è crescente in $\mathbb{R}$

(c) $\exists \lim_{x \to +\infty} g(x) = \sup \{ g(x) : x \in \mathbb{R} \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(d) $\exists \lim_{x \to -\infty} g(f(x)) = \inf \{ g(x) : x \in \mathbb{R} \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$\boxed{\text{due sono vere e due sono false}}$

<u>Facoltativo</u>. Se $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$,

$$f(t) = u(t) + i\, v(t),$$

con $u, v : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

definiamo $\lim_{t \to 0} f(t) = \left(\lim_{t \to 0} u(t) \right) + i \cdot \left(\lim_{t \to 0} v(t) \right)$.

Calcolare $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{e^{i\theta} - 1}{\theta}$

e giustificare i passaggi.