I prova parziale scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile-Architettura, 2010/11

Nome...**Cognome**.. **Matricola**.................

(1) [6 pt] Calcolare il imite di funzione

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{(\sqrt[7]{2+x}) - \sqrt[7]{2})\log(\cos(7x))}{(\sqrt[7]{2+x}) + \sqrt[7]{2})(1-\cos(9x))\sin(4x)}$$

$$-\frac{7}{2^4 \cdot 3^2}$$

(2) [6 pt] Calcolare il limite di successioni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 3^{2n+1} + n^2\cdot 2^{3n+1} + (n+1)(3^2)^{n+1}}{n\cdot(3^{n+1})^2 + n^2\cdot(2^{n+1})^3}$$

$$\frac{4}{3}$$

(3) [6 pt.] Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Quali delle seguenti affermazioni *non segue necessariamente* da queste ipotesi?

- f ha massimo in $[-1, 1]$
- Se $f(x) < 0$ quando $x \in [-1, 0)$ e $f(x) > 0$ quando $x \in (0, 1]$, allora esiste $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
- Esiste $\lim_{x \to 0^+} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- Esiste $\lim_{x \to -1^+} f(x) \in \mathbb{R}$.

(4) [6 pt] Siano $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $g(0) = 3$, $g(1) = 2$. Quale delle seguenti affermazioni *segue necessariamente* da queste ipotesi?

- Esiste x in $[0, 1]$ tale che $2f(x) + 3g(x) = 25/2$.
- Esiste x in $[0, 1]$ tale che $2f(x) - 3g(x) = 25/2$.
- Esiste f è crescente in $[0, 1]$.
- Esiste $f + g$ è costante in $[0, 1]$.

(5) [6 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^2 - (3 + i2)z + i6)(iz^6 + 2)$$

e dire quante soluzioni hanno parte immaginaria non negativa.

$$z = 3, 2i, \sqrt[6]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

cinque delle soluzioni hanno parte ~~di~~ immaginaria non negativa

ES.1.

$$\frac{\left(\sqrt[7]{2+x}-\sqrt[7]{2}\right)\cdot\log(\cos(7x))}{\left(\sqrt[7]{2+x}+\sqrt[7]{2}\right)\cdot\left(1-\cos(9x)\right)\cdot\sin(4x)} =$$

$$= \sqrt[7]{2}\cdot\frac{\sqrt[7]{1+x/2}-1}{x/2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\log\left(1+(\cos(7x)-1)\right)}{\cos(7x)-1}\cdot\frac{\cos(7x)-1}{\frac{(7x)^2}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{(7x)^2}{2}\right)\frac{(9x)^2/2}{1-\cos(9x)}\cdot\left(\frac{1}{(9x)^2/2}\right)\cdot\frac{4x}{\sin(4x)}\left(\frac{1}{4x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[7]{2+x}+\sqrt[7]{2}}$$

$$\xrightarrow[x\to 0^+]{} \cancel{\sqrt[7]{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{7}}\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{\cancel{2}\,\cancel{\sqrt[7]{2}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{\cancel{2}}{9^2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= -\frac{7}{2^4\cdot 3^2}$$

ES.2.

$$\frac{n\cdot 3^{2n+1}+n^2\cdot 2^{3n+1}+(n+1)\cdot(3^2)^{n+1}}{n\cdot(3^{n+1})^2+n^2\cdot(2^{n+1})^3} =$$

$$= \frac{n\cdot 9^n\cdot 3+n^2\cdot 8^n\cdot 2+(n+1)\,9^n\cdot 9}{n\cdot 9^n\cdot 9+n^2\cdot 8^n\cdot 8}$$

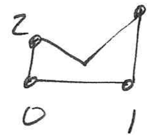
$$= \frac{n\cdot 9^n}{n\cdot 9^n}\cdot\frac{3+9+o(1)}{9+o(1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{4}{3}$$

ES.3 Se $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, ha $\max\{f(x): -1\le x\le 1\}=f(1)$, ed esistono $\lim_{x\to 0^+} f(x)\ge f(0)$ e $f(-1)\le\lim_{x\to -1^+} f(x)\le f(0)$, quindi $\exists\lim_{x\to 0^+} f(x)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ e $\exists\lim_{x\to -1^+} f(x)\in\mathbb{R}$.

Potrebbe non esistere $\lim_{x\to 0} f(x)$. P. es, se

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ 1 & \text{se } x>0\end{cases}$$

allora non esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$.

ES. 4 Non è detto che f sia crescente in $[0,1]$:  (ii)

Non è detto che $f+g$ sia costante in $[0,1]$.

P. es. $f(x) = x+2$ e $g(x) = 3 - x^2$ verificano le ipotesi, ma $f(x) = -x^2 + x + 5$ non è costante.

Pongo $h(x) = 2f(x) + 3g(x) - \frac{25}{2}$:

$$h(0) = 2f(0) + 3g(0) - \frac{25}{2} = 4 + 9 - \frac{25}{2} = \frac{26-25}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

e $h(1) = 2f(1) + 3g(1) - \frac{25}{2} = 6 + 6 - \frac{25}{2} = \frac{24-25}{2} = -\frac{1}{2} < 0$.

Poiché $h \in C([0,1])$, $\exists\, x \in (0,1)$: $h(x) = 0$, cioè t.c. $2f(x) + 3g(x) = \frac{25}{2}$.

Se avessi posto $k(x) = 2f(x) - 3g(x) - \frac{25}{2}$, avrei avuto $k(0) = 4 - 9 - \frac{25}{2}$ e $k(1) = 6 - 6 - \frac{25}{2}$, cioè $k(0), k(1) < 0$: non posso applicare il teorema degli zeri.

Infatti, se $f(x) = x+2$ e $g(x) = 3 - x$ (che soddisfano le ipotesi), allora

$$k(x) = 2(x+2) - 3(3-x) - \frac{25}{2} = 5x - \frac{35}{2},$$

che si annulla solo in $x = \frac{7}{2} \notin [0,1]$.

ES. 5 $z^2 - (3+2i)z + 6i = z^2 - 3z - 2iz + 6i$

$= z^2 - 3z - 2i(z-3) = (z-3)(z-2i) = 0 \iff \boxed{z = 3,\ z = 2i}$

$iz^6 + 2 = 0 \iff iz^6 = -2 \iff z^6 = (-i)\cdot(-2) = 2i$

$= 2 \cdot e^{i\pi/2}$

Hanno parte immaginaria ≥ 0

$$\iff z = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi i}{6}\right)}$$

con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$= \sqrt[6]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

Non ci sono radici reali, quindi, per simmetria, tre radici su sei hanno parte imm. ≥ 0 | Sì in tutto.