Derivate.

Def. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
f è derivabile in $x_0 \iff$

$$\exists\, L := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R},$$

nel qual caso $L = f'(x_0)$ è la derivata di f in x_0.

Nota. Possiamo equivalentemente scrivere

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

o $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) h + o(h)_{h \to 0}$

o $f(x) = f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)_{x \to x_0}$

Teorema. $x_0 \in I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.
Se $\exists\, f'(x_0)$, allora f è continua in x_0.

Dim. $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) \cdot 0 = 0$ $\square$

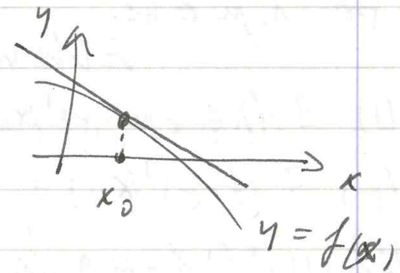
Esempio. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$:
f è continua in $x = 0$, ma non esiste $f'(0)$.

Infatti: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

così che $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$

Def. Siano $x_0 \in I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, f derivabile in x_0. Allora, la retta tangente al grafico di f in x_0 è

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



Cioè, $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in x_0.

Interpretazione cinematica. Se penso a $I \subseteq \mathbb{R}$ come a un intervallo temporale (ascisse) e alle ordinate, $\mathbb{R}$, come alle posizioni di un "punto materiale", allora $t \mapsto f(t) = x$; $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$; può essere interpretata come una traiettoria del punto materiale, mentre

$$f'(t) = \frac{dx}{dt} \text{ è la velocità all'istante } t.$$

Notazioni. $f'(x) = \dfrac{df}{dx}(x) = \dot{f}(x) = \dot{y}(x)$

$= Df(x) = \ldots$ sono notazioni utilizzate per la derivata.

__Teorema__ (sul calcolo delle derivate).

Siano $x_0 \in I \xrightarrow{g,f} \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e siano f, g derivabili in x_0. Siano poi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Allora,

(1) $\exists\, (\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu\, g'(x_0)$

(2) $\exists\, (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

__dim.__ (1) $[(\lambda f + \mu g)(x_0+h) - (\lambda f + \mu g)(x_0)]/h$

$= [\lambda f(x_0+h) + \mu\, g(x_0+h) - \lambda f(x_0) - \mu\, g(x_0)]/h$

$= \lambda \cdot [f(x_0+h) - f(x_0)]/h + \mu \cdot [g(x_0+h) - g(x_0)]/h$

$\xrightarrow[h \to 0]{} \lambda \cdot f'(x_0) + \mu \cdot g'(x_0)$ ∎

(2) Essendo f e g derivabili in x_0, sono continue in x_0. ~~per cui esistono~~ ~~$\delta > 0, M > 0\ \forall x \in I: |x - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x)| \le M$~~.

Calcolo ora:

$[(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)]/h =$

$= [f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)]/h =$

$= [f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0+h) \cdot g(x_0)$

$+ f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)]/h$

$= f(x_0+h) \cdot [g(x_0+h) - g(x_0)]/h$

$+ g(x_0) \cdot [f(x_0+h) - f(x_0)]/h$

$\xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$

per ipotesi. ∎

__Nota__. La proprietà (2) è "qualitativamente nuova" rispetto a quelle concernenti limiti di prodotti (la derivata di un prodotto non è un limite di prodotti).

__oss__ ~~Corollario~~. Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, f costante, cioè, $\exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in I: f(x) = k$.

Allora, $\exists f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

__dim.__ $[f(x+h) - f(x)]/h = (k-k)/h = 0 \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad \forall x \in I$. ∎

__oss.__ Se $f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, per (2) abbiamo:

$f'(x) = (f \cdot f)'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) = 2 f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (poiché $f(x) \cdot f(x) = f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Cioè, se $\exists f'(x)$, deve essere $f'(x) = 0$.

__oss.__ Un ragionamento simile implica che, se $f, g: I \to \mathbb{R}$ sono derivabili in $x_0 \in I$ e $g(x_0) \neq 0$, __e se__ $\exists\, (f/g)'(x_0)$, allora __deve essere__:

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Infatti,

$f'(x_0) = (g \cdot f/g)'(x_0) = g'(x_0) \cdot (f/g)(x_0) + g(x_0) \cdot (f/g)'(x_0)$

$\Rightarrow (f/g)'(x_0) = \left[f'(x_0) - g'(x_0) \cdot \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}\right] / g(x_0)$

$= [f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)] / g(x_0)^2$ ∎

Proprietà. Siano $x_0 \in I \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$; f e g derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$. Allora, $f/g : J \to \mathbb{R}$ è definita su un intervallo $J \subseteq I$, $x_0 \in J$ e

$$\exists \left(f/g\right)'(x_0) = \left[f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)\right] / g(x_0)^2.$$

Dim. La formula per $(f/g)'(x_0)$ è l'unica possibile: dobbiamo solo mostrare che $\exists (f/g)'(x_0)$.

Poiché g è continua in x_0 e $g(x_0) \neq 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow g(x) > 0$.

Sia $J = I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Se $x \in J$,

$$\left[(f/g)(x_0+h) - (f/g)(x_0)\right]/h = \left[\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right] \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0+h)}{g(x_0+h) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{g(x_0+h)\, g(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0+h)}{h}$$

$$= \frac{1}{g(x_0+h) \cdot g(x_0)} \cdot \left[g(x_0) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right]$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{g(x_0)^2} \cdot \left[g(x_0)\, f'(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)\right],$$

e ritroviamo la formula voluta ∎

Teorema (derivata di una composizione). Siano $x_0 \in I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo; e $f(x_0) \in J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$; $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Se $f(I) \subseteq J$ e $\exists f'(x_0)$ e $\exists g'(f(x_0))$, allora

$$\exists (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dim. Dalle ipotesi segue che $g \circ f$ è definita. Sia $h \in \mathbb{R}$, ~~...~~ Allora,

$$(g \circ f)(x_0+h) - (g \circ f)(x_0) = g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) =$$

(Sia $k = f(x_0+h) - f(x_0)$)

$$= g(f(x_0) + k) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))\, k + \varphi(k),$$

dove $\frac{\varphi(k)}{k} \xrightarrow[k \to 0]{} 0$.

$$= g'(f(x_0)) \cdot \left[f(x_0+h) - f(x_0)\right] + \varphi(k)$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot \left(f'(x_0)\, h + \psi(h)\right) + \varphi(k), \text{ dove } \frac{\psi(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

(ho usato una versione della def. di derivata prima, quella con gli o-piccoli)

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \cdot h + g'(f(x_0)) \cdot \psi(h) + \varphi(f(x_0+h) - f(x_0)).$$

Quindi,

$$\left[(g \circ f)(x_0+h) - (g \circ f)(x_0)\right]/h = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + A + B,$$

con $A = g'(f(x_0)) \cdot \psi(h)/h \xrightarrow[h \to 0]{} g'(f(x_0)) \cdot 0 = 0$ e

$B = \varphi(f(x_0+h) - f(x_0))/h \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, perché

$B = 0$ se $f(x_0+h) - f(x_0) = 0$, mentre

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{cambiam.} \\ k = f(x_0+h) - f(x_0) \\ \text{nel limite}\end{array}}$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0}} B = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(f(x_0+h) - f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0 \cdot f'(x_0)$$

∎

Def. Siano $x_0 \in I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. x_0 è un punto di <u>massimo relativo</u> per f in I se $\exists \delta \geq 0$:

$$\forall x \in I: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Es. Definire "punto di minimo relativo".

<u>Teorema di Fermat.</u> Siano $x_0 \in (a,b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, e sia x_0 un punto di MAX. relativo per f in (a,b) (o di min. relativo).

Se $\exists f'(x_0)$, allora $f'(x_0) = 0$.

<u>Dim.</u> Siano $\delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1$ e $x \in (a,b) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$, $\delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow x \in (a,b)$ e sia $\delta = MAX(\delta_1, \delta_2)$.

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$ per confronto.

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$ per confronto.

Quindi, $f'(x_0) = 0$ ∎

<u>Esempi.</u> (1) $f(x) = |x|$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ha un p.to di min. rel. è $x_0 = 0$, ma non esiste $f'(0)$:
non tutti i punti di min/MAX relativo si ottengono ponendo $f'(x) = 0$.

(2) Sia $f(x) = x^3$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2$, quindi $f'(0) = 0$.
Però f è <u>strettamente crescente</u> in $\mathbb{R}$, quindi $x_0 = 0$ non è di min. rel., né di MAX. rel.

Mostriamo che f è strettamente crescente. Siano $x > y$ in $\mathbb{R}$.
Allora, $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
Poiché $x \neq y$, dev'essere $x \neq 0$ o $y \neq 0$.
Suppongo che sia $y \neq 0$. Allora

$$x^3 - y^3 = (x-y) \cdot y^2 \cdot \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1\right] =$$

$= (x-y) \cdot y^2 \cdot (T^2 + T + 1)$: i primi due fattori sono positivi. Quanto al terzo,

$$T^2 + T + 1 = \left(T + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \ \forall T \in \mathbb{R}.$$

Dunque, $x^3 - y^3 > 0$, come volevamo ∎

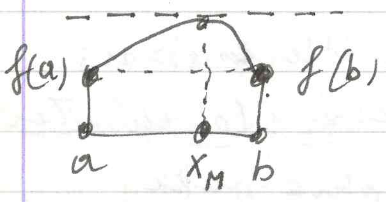
Dal T. di Fermat e dal T. di Weierstrass seguono alcune <u>proprietà</u> globali delle funzioni derivabili, chiamate complessivamente Teoremi del Valor Medio.

Teorema di Rolle. Sia $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se $f(a)=f(b)$, allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0)=0$.

Dim. Per T. Weierstrass, f ha un p.to di MAX. in $[a,b]$, diciamo x_M, e un p.to di min. x_m.

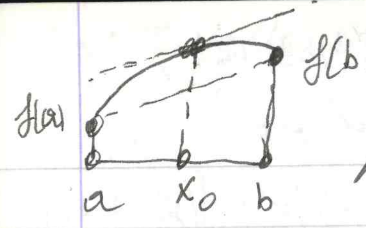
• Se a è p.to di MAX, anche b è p.to di MAX. poiché $f(a)=f(b)$.
Se a (quindi b) è anche p.to di min, allora $\max f = \min f$ e f è costante, quindi $f'(x)=0 \quad \forall x\in[a,b]$.

• Se ciò non accade, $x_M \in (a,b)$ o $x_m \in (a,b)$. ~~In entrambi i casi,~~ $\cancel{f'(x_M)=0}$ Per T. Fermat, dunque, $f'(x_m)=0$ o $f'(x_M)=0$.
In ogni caso, T. Rolle è mostrato ∎



~~Esempi. Sia $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.~~
~~f è derivabile in $(0,1]$~~

Esempio. $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$.
Non esiste $f'(0)$ e $\forall x\in[-1,1]\setminus\{0\} \Rightarrow f'(x)\neq 0$.



T. di Lagrange. Sia $f\in C([a,b],\mathbb{R})$, f derivabile in (a,b).
Allora,
$$\exists\, x_0\in(a,b):\ f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Oss. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta congiungente i punti estremi di grafico(f), $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$.

Dim. ("Trasformo la tesi in funzione").
Sia $h(x)= f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$; $h:[a,b]\to\mathbb{R}$.

$h\in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $\forall x\in(a,b)\ \exists\, h'(x)$, e

$$h(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\frac{b f(a)-a f(b)}{b-a},$$

$$h(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b=\frac{b f(a)-a f(b)}{b-a}:$$

$h(a)=h(b)$.
Il T. di Rolle assicura che $\exists\, x_0\in(a,b)$:
$$0=h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$
come si voleva ∎

Es. Trovare argomentazioni intuitive per mostrare T. Rolle e T. Lagrange.

__T. di Cauchy.__ Siano $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$, f e g derivabili in (a,b). Allora,

$$\exists x_0 \in (a,b) : f'(x_0)\,(g(b)-g(a)) = g'(x_0)\cdot(f(b)-f(a)).$$

__dim.__ Sia $h : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x)\cdot(g(b)-g(a)) - g(x)\cdot(f(b)-f(a)).$$

$h \in C([a,b], \mathbb{R})$, $\exists\, h'(x)\ \forall x \in (a,b)$ e

$$h(a) = f(a)\,g(b) - g(a)\,f(b) = h(b);$$

posso usare T. Fermat e ottengo: $\exists\, x_0 \in (a,b)$:

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0)\cdot(g(b)-g(a)) - g'(x_0)\cdot(f(b)-f(a)),$$

da cui segue la tesi. ■

__OSS.__ Se in T. Cauchy pongo $g(x) = x$, ottengo T. Lagrange.

__Nota.__ Usando due volte T. Lagrange, ho che

$$\exists x_1 : f'(x_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\exists x_2 : g'(x_2) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \exists x_1, x_2 : f'(x_1)\cdot(g(b)-g(a)) = g'(x_2)\cdot(f(b)-f(a)).$$

Questo è __meno__ di T. Cauchy, dove __un solo__ punto x_0 viene usato.

Dai T. della media, che in ultima analisi dipendono dal T. di Weierstrass, si deducono le __direzioni non banali__ (e più utili) dei Teoremi che seguono.

Vediamo un primo, semplice esempio.

__Teorema.__ Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, ~~derivabile~~ $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

Allora, $(1) \Leftrightarrow (2)$.

(1) f è costante in I

(2) f è derivabile e $f'(x) = 0\ \forall x \in I$.

__dim.__ $(1) \Rightarrow (2)$ è banale e già vista.

Sia $x_0 \in I$, $x \in I$: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, quindi $\exists\, f'(x_0) = 0$.

$(2) \Rightarrow (1)$ non è banale. Sia $c \in I$ fissato e sia $x \in I$. f è derivabile nell'intervallo chiuso J di estremi c, x, quindi (per T. Lagrange) $\exists y$ ~~[illegible]~~ in J:

$$f(x) - f(c) = (x-c)\cdot f'(y) = (x-c)\cdot 0 = 0,$$

dove uso che $f'(y) = 0$ per ipotesi.

Quindi, $f(x) = f(c)\ \forall x \in I$: f è costante ■

$(1) \Rightarrow (2)$ Info globale $\Rightarrow$ Info locale (ovvio).

$(2) \Rightarrow (1)$ Info locale $\Rightarrow$ Info globale (profondo).

Teorema (sulla relazione tra monotonia di una funzione e segno della derivata). Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile.

Allora,

(1) f è crescente in $I \iff \forall x \in I: f'(x) \geq 0$

(2) f è decrescente in $I \iff \forall x \in I: f'(x) \leq 0$

(3) $\forall x \in I: f'(x) > 0 \Rightarrow f$ cresce strettamente in I.

(4) $\forall x \in I: f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decresce strettamente in I.

dimo (1) ($\Rightarrow$) facile. Sia $x_0 \in I$. Per ogni altro $x \in I$, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ poiché f cresce, quindi (T. confronto) $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

(1)($\Leftarrow$) meno facile. Siano $x_1 < x_2$ in I. Per T. Lagrange, $\exists x \in (x_1, x_2)$:

$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x) \geq 0$, per Hp.,

quindi $f(x_2) \geq f(x_1)$, come si voleva.

(3) Come in (1)($\Leftarrow$), ma stavolta $f'(x) > 0$, quindi

$$f(x_2) - f(x_1) > 0.$$

(2) e (4) si mostrano allo stesso modo.

Esempio. Sia $f(x) = x^3$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, anche se $f'(0) = 0$: (3) nel Teorema precedente non è invertibile.

OSS. Utilizzando il T. precedente nello stabilire se una funzione sia monotona, è utile sapere che:

(1) se $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ è crescente in (a,b), allora f è crescente in $[a,b]$;

(2) se $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ è strettamente crescente in (a,b), allora lo è in $[a,b]$.

Esercizio. Mostrare l'osservazione che precede.