Note sugli studi di funzione. In generale, viene data una "funzione", cioè un'espressione

$$y = f(x)$$

dove a ciascuno $x \in \mathbb{R}$ per cui l'espressione $f(x)$ è definita si associa l'unico valore $y = f(x)$ assunto da essa. Ciò che si vuole ottenere, in generale, sono alcune informazioni su come $f(x)$ varia al variare di x e un grafico da cui queste informazioni siano leggibili.

Le informazioni che quasi sempre risultano essere interessanti ~~sono~~ rispondono alle domande:

(1) qual'è Dominio$(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x)$ ha senso$\}$?

(2) Su quale sottinsieme $A \subseteq$ Dominio(f) la funzione f è continua?

(3) Se $I \subseteq A$ è un intervallo (massimale!) contenuto in A, p. es. $I = (a, b)$, ~~trovare~~ quali sono $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$?

(4) Su quale sottinsieme $B \subseteq A \subseteq$ Dominio(f) la funzione f è derivabile?

[Analogamente a (2), (3) possiamo farci domande sulla continuità di f' e sui suoi limiti agli estremi degli intervalli su cui è definita: è un'analisi più sottile che a volte è utile fare].

(5) Su quali intervalli $J \subseteq$ Dominio(f) la funzione f è, rispettivamente, crescente o decrescente?

$\boxed{\text{(6) Tracciare il grafico di } f}$

Note. (a) Con le informazioni (1)-(5) e aiutandosi con (6), possiamo trovare gratis altre informazioni: punti di MAX./min. relativo, sup f, inf f...

(b) A volte servono informazioni ulteriori a (1)-(5).

(c) L'ordine con cui s'affrontano (1)-(5) dipende da gusto e comodità

Esempi

(1) Studiare $\boxed{f(x) = 2\cdot x^3 - 3x^2 - 12\cdot x + 6}$ e utilizzare le informazioni raccolte per trovare quante soluzioni $x \in \mathbb{R}$ ha l'equazione $\boxed{2x^3 - 3\cdot x^2 - 12\cdot x + 6 = 0}$.

Svolgimento. (1) Dominio$(f) = \mathbb{R}$. (4) Dominio$(f') = \mathbb{R}$,

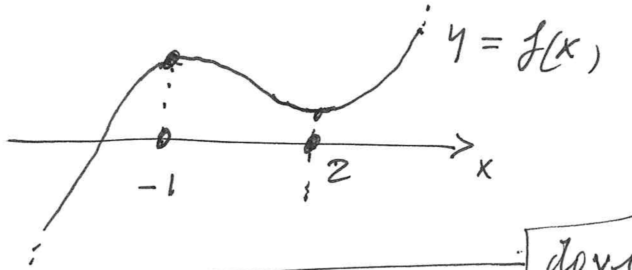
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12\cdot x = 6\cdot(x^2 - x - 2) = 6\cdot(x-2)(x+1)$, quindi f è continua su $\mathbb{R}$ e ho risposto anche a (2).

(3) $f(x) = 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 12\cdot x + 6 = x^3\cdot\left(2 + \underset{x\to\pm\infty}{o(1)}\right) \to \begin{cases} +\infty & \text{se } x \to +\infty \\ -\infty & \text{se } x \to -\infty \end{cases}$

(5) $f'(x) = 6\cdot(x-2)(x+1) \geq 0 \iff x \leq -1$ o $x \geq 2$:

f cresce su $(-\infty, -1]$ e su $[2, +\infty)$; decresce in $[-1, 2]$.

(6)



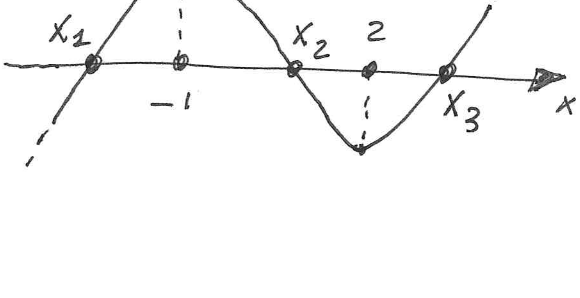
Questo grafico non è preciso riguardo al segno. Per essere preciso dovrei sapere il segno di $f(-1)$, $f(2)$

→ Proprio di queste informazioni ho bisogno per trovare quante soluzioni $f(x) = 0$ abbia in $\mathbb{R}$.

$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 6 = 13 > 0$

$f(2) = 16 - 12 - 24 + 6 = -14 < 0$

→ $f(x) = 0$ ha tre soluzioni in $\mathbb{R}$, $x_1 < -1 < x_2 < 2 < x_3$.

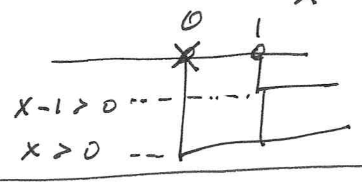


(2) Studiare $f(x)=x\cdot e^{1/x}$.

svolgimento. $\boxed{\text{Dominio}(f)=\text{Dominio}(f')=\mathbb{R}\setminus\{0\}}$, perché solo $x=0$ fa perdere di senso a f e f'.

$$f'(x) = e^{1/x}\left[1 + x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = e^{1/x}\cdot\frac{x-1}{x}$$

$$f'(x)\geq 0 \iff \frac{x-1}{x}\geq 0$$



$\iff x<0$ o $x\geq 1$

Quindi $\boxed{f \text{ cresce in } (-\infty,0) \text{ e in } [1,\infty); \text{ decresce in } (0,1].}$

Limiti agli estremi degli intervalli di definizione.

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot e^{1/x} = \pm\infty\cdot e^0 = \pm\infty}$$

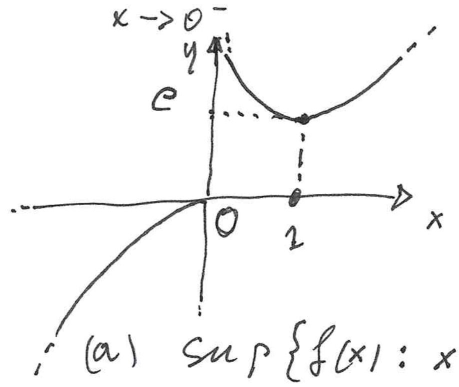
$\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{1/x} = 0\cdot e^{+\infty}$: forma di indeterminazione. La sciolgo:

$$x\cdot e^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{1/x} = \frac{e^z}{z} \to +\infty,$$ per $z=\frac{1}{x}\to+\infty$ (perché $x\to 0^+$) confronto expo/polinomi e cambiamento delle variabili negli integrali.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{1/x} = +\infty}$$

Per $x\to 0^-$, ~~[illegible]~~

$x\cdot e^{1/x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot 0 = 0$: $\boxed{\lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{1/x} = 0}$



← Grafico(f).

Altre informazioni che otteniamo senza sforzo dalle precedenti analisi.

(a) $\sup\{f(x) : x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\} = +\infty$

(b) $\inf\{f(x) : x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\} = -\infty$

$\Rightarrow$ (c) f non ha MAX, né min. in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(d) $x=1$ è punto di minimo relativo, $f(1)=e$

(e) L'immagine di f è $f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \{y : y=f(x)\ \exists x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$
$= (-\infty,0)\cup[e,+\infty)$

(3) Studiare $f(x) = x \cdot e^{-|x^2-3x+2|}$

$\boxed{\text{Dominio}(f) = \mathbb{R} \text{ e } f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$ Infatti, nessuna delle operazioni e composizioni in f ci fa uscire dalla categoria delle funzioni continue.

Prima calcolo f', poi verifico di poterlo fare:

$$f'(x) = e^{-|x^2-3x+2|} \cdot \{1 - x \cdot \text{sgn}(x^2-3x+2) \cdot (2x-3)\}$$

Sicuramente $\exists f'(x)$ se $x^2-3x+2 \neq 0$, cioè $(x-2)(x-1) \neq 0$; $x \neq 2, x \neq 1$

$\text{Dominio}(f') \supseteq \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$

Problema: $\exists f'(1), f'(2)$? Rimando la risposta.

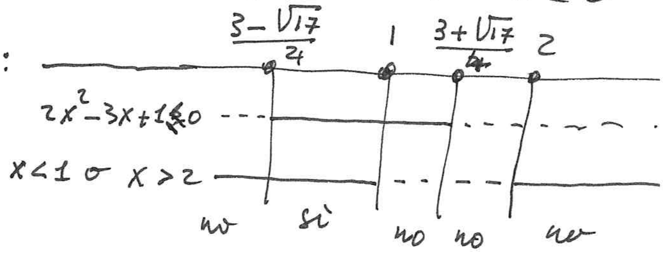
Poiché $x^2-3x+2 > 0 \iff x < 1$ o $x > 2$, ho che

$$f'(x) = e^{-|x^2-3x+2|} \cdot \begin{cases} 1 - x\cdot(2x-3) = -2x^2+3x+1 & \text{se } x<1 \text{ o } x>2 \\ 1 + x\cdot(2x-3) = 2x^2-3x+1 & \text{se } 1<x<2 \end{cases}$$

Dunque $f'(x) \geq 0$ se (A) $\begin{cases} -2x^2+3x+1 \geq 0 \\ x<1 \text{ o } x>2 \end{cases}$ oppure (B) $\begin{cases} 2x^2-3x+1 \geq 0 \\ 1<x<2 \end{cases}$

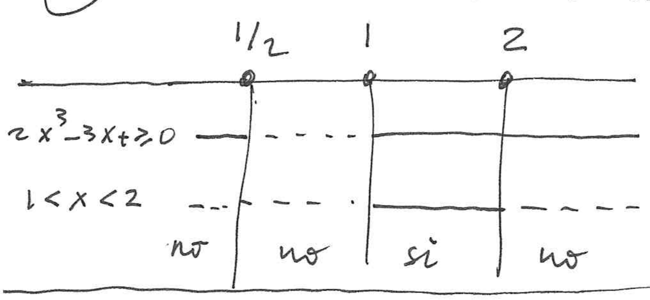
studio (A) $\Delta = 9 + 4 \cdot 2 = 17 > 0$: $-2x^2+3x+1 \geq 0 \iff 2x^2-3x-1 \leq 0$

$\iff \frac{3-\sqrt{17}}{4} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{17}}{4}$:



(A) $\iff \frac{3-\sqrt{17}}{4} \leq x < 1$

(B) $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$: $2x^2-3x+1 \geq 0 \iff x \leq \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ o $x \geq \frac{3+1}{4} = \frac{1}{2}$



(B) $\iff 1 < x < 2$

- f cresce su $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{4}, 1\right]$ e su $[1, 2]$, quindi su $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{4}, 2\right]$
- f decresce su $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right]$ e su $[2, +\infty)$.

Calcolo i limiti a $\pm\infty$, che sono di tipo $0\cdot(\pm\infty)$.

$$f(x) = x \cdot e^{-|x^2-3x+2|} = \frac{x}{e^{x^2\cdot|1-3/x+2/x^2|}}$$

$$= \frac{x}{e^{x^2}\left(1+\underset{x\to\pm\infty}{o(1)}\right)} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

per confronto tra exp e polinomi.

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0}$$

Rimane il problema di $f'(1)$, $f'(2)$.

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = e^0\cdot\{1-1\cdot(-1)\cdot(2-3)\} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = e^0\cdot\{1-1\cdot(+1)\cdot(2-3)\} = 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = e^0\cdot\{1-2\cdot(-1)\cdot(4-3)\} = 3$$

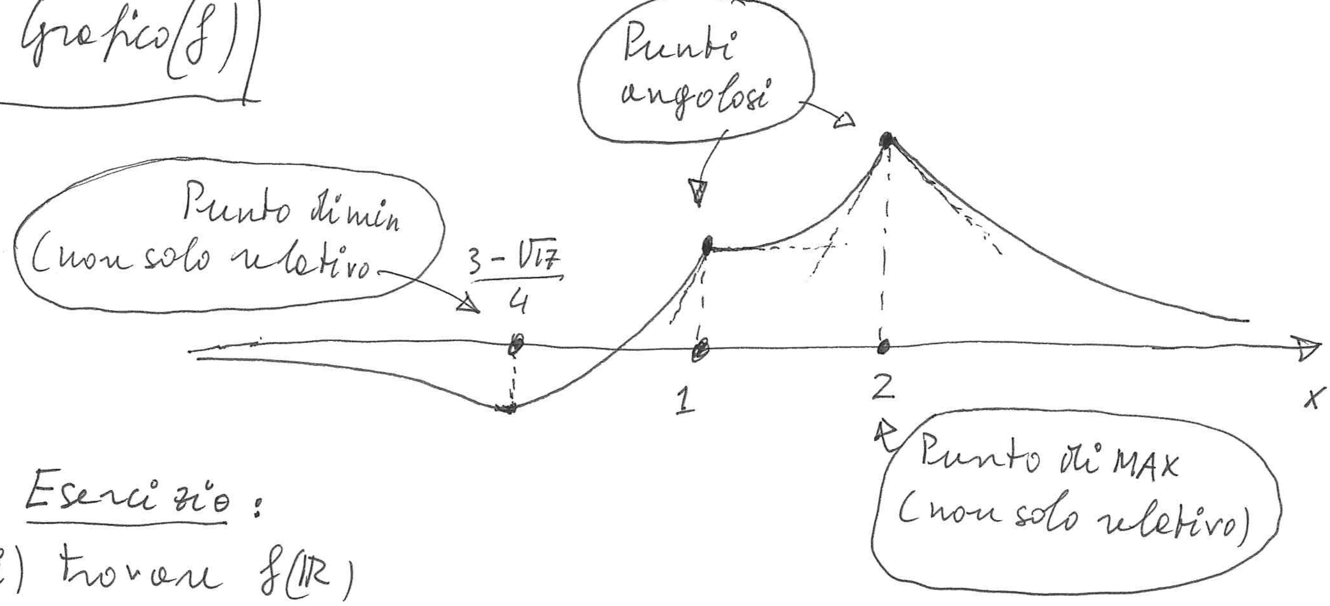
$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = e^0\cdot\{1-2\cdot(+1)\cdot(4-3)\} = -1$$

$\Rightarrow$ non esistono $f'(1)$, $f'(2)$

$\Downarrow$

$$\boxed{\text{Dominio}(f') = \mathbb{R}\setminus\{1,2\}}$$

$\boxed{\text{Grafico}(f)}$



Esercizio:

(i) trovare $f(\mathbb{R})$

(ii) trovare le rette tangenti da sinistra e da destra al grafico di f nei punti angolosi.