Integrali.

Costruzione. Sia $f \in C([a,b],\mathbb{R})$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, siano $t_j = a + (b-a)\frac{j}{n}$; $j = 0, 1, \dots, n$.

Per $j = 1, \dots, n$, scegliamo $s_j^n \in [t_{j-1}, t_j]$.

Sia $S_n(f) = S_n(f; s_1^n, \dots, s_n^n) = \sum_{j=1}^{n} f(s_j^n)(t_j - t_{j-1})$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} f(s_j^n)$$

Allora, $\exists \lim_{n\to\infty} S_n(f) \overset{\text{DEF.}}{=:} \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$.

Tale limite è indipendente dalla scelta di $s_1^n, \dots, s_n^n$.

Cioè, per ogni altra scelta $w_j^n \in [t_{j-1}, t_j]$; $j = 1, \dots, n$,

si ha che $\lim_{n\to\infty} S_n(f; s_1^n, \dots, s_n^n) = \lim_{n\to\infty} S_n(f; w_1^n, \dots, w_n^n)$.

Il numero $\int_a^b f(x)\,dx$ è detto integrale di f su $[a,b]$.

Proprietà. Siano $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora,

(1) $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$
(linearità)

(2) Se $f \geq g$ su $[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$
(confronto).

(3) Se $f \geq 0$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

(4) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

(5) Se f è costante in $[a,b]$, $f(x) = c \ \forall x \in [a,b]$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

dim. (1) Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; $t_j = a + (b-a)\frac{j}{n}$ $(j = 0, 1, \dots, n)$
e $s_j^n \in [t_{j-1}, t_j]$. Allora,

$$S_n(\lambda f + \mu g; s_1^n, \dots, s_n^n) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda f + \mu g)(s_j^n) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda f(s_j^n) + \mu\, g(s_j^n)\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} f(s_j^n)\,\frac{b-a}{n} + \mu \cdot \sum_{j=1}^{n} g(s_j^n)\,\frac{b-a}{n}$$

$$= \lambda \cdot S_n(f; s_j^n, \dots, s_n^n) + \mu \cdot S_n(g; s_1^n, \dots, s_n^n)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

per definizione di integrale e per proprietà dei limiti.

D'altra parte, $\lambda f + \mu g$ è continua e

$$S_n(\lambda f + \mu g; s_1^n, \dots, s_n^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx,$$

così che la tesi segue per l'unicità del limite.

(2) $$S_n(f; s_1^n, \dots, s_n^n) = \sum_{j=1}^{n} f(s_j^n)\,\frac{b-a}{n} \underset{\text{per ipotesi}}{\geq} \sum_{j=1}^{n} g(s_j^n) = S_n(g; s_1^n, \dots, s_n^n),$$

~~[illegible]~~

$$S_n(f; s_1^n, \dots, s_n^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx \qquad S_n(g; s_1^n, \dots, s_n^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$ per confronto di limiti di succ.

(5) ~~[illegible]~~ $$S_n(f; s_1^n, \dots, s_n^n) \underset{\text{per ipotesi}}{=} \sum_{j=1}^{n} c \cdot \frac{b-a}{n} = n \cdot c \cdot \frac{(b-a)}{n} = c \cdot (b-a)$$

perché abbiamo la somma di c n volte

$$S_n(f; s_1^n, \dots, s_n^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b c \cdot dx = (b-a)\,c.$$

(3) Per (2) e (5) e ipotesi: $$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b 0 \cdot dx = 0 \cdot (b-a) = 0$$

(4) Poiché $x \mapsto |f(x)|$ è continua e $\forall x \in [a,b]: -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

usando (2) ho: $$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

da cui $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \;\blacksquare$$

Proprietà (additività degli integrali).

Siano $a < b < c$ e ~~Allora~~ $f \in C([a,c], \mathbb{R})$. Allora,

$$(*) \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Ispirati da $(*)$, se $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, poniamo

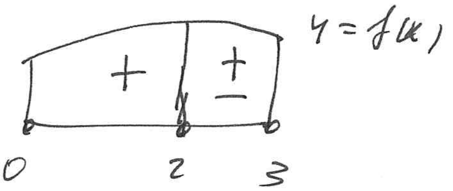
$$\int_b^a f(x)\,dx \overset{df.}{=} -\int_a^b f(x)\,dx \quad e \quad \int_a^a f(x)\,dx \overset{df.}{=} 0.$$

Corollario. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Allora $(*)$ vale:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx,$$

purchè tutti gli integrali esistano.

P. Es. $\int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx$ (se $f \in C([0,3], \mathbb{R})$).



~~Proprietà~~ **Teorema** (della media integrale).

Sia $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. Allora, $\exists c \in [a,b]$ t.c.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

dim. Per T. Weierstrass, $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$: $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$ $\forall x \in [a,b]$.

Per confronto: $(b-a) f(x_m) = \int_a^b f(x_m)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(x_M)\,dx = (b-a) f(x_M)$,

quindi $f(x_m) \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \le f(x_M)$.

La funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, ~~$g(x) = f(x) - f(x_m)$ soddisfa~~

$g(x) = f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$, soddisfa $g(x_m) \le 0 \le g(x_M)$.

Per T. zeri, esiste c tra x_m e x_M (quindi, $c \in [a,b]$) t.c.

$$0 = g(c) = f(c) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \quad \blacksquare$$

Teorema fondamentale del Calcolo Integrale – I parte.

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$, $f \in C(I, \mathbb{R})$.

Definisco $F : I \to \mathbb{R}$, $\quad F(x) \overset{\text{def.}}{=} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ – F è una funzione integrale di f con origine in x_0

Allora,

(i) $F \in C^1(I, \mathbb{R})$

(ii) $\forall x \in I$: $F'(x) = f(x)$.

dim. Sia $x \in I$ e sia $h \in \mathbb{R}$ t.c. $x+h \in I$.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt + \int_{x}^{x_0} f(t)\,dt\right)$$

$= \frac{1}{h} \cdot \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$ (per additività dell'integrale)

$= \frac{1}{(x+h)-x} \cdot \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$. Per il T. della media integrale, $\exists\, c(h)$ tra x e $x+h$ (se $h \geq 0$, $x \leq c(h) \leq x+h$; se $h < 0$, $x+h \leq c(h) \leq x$)

t.c. $\quad f(c(h)) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

Ora, per continuità di f e poichè $c(h) \xrightarrow[h \to 0]{} x$ per confronto,

$$f(x) = \lim_{h \to 0} f(c(h)) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)\text{: in particolare } \exists F'(x) \text{ e } F'(x) = f(x)$$

Def. Sia $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ e sia $G \in C^1([a,b], \mathbb{R})$. G è una primitiva di f se $\forall x \in [a,b]$: $G'(x) = f(x)$.

OSS. T.F.C.I.–1 afferma che ogni funzione integrale di f è una primitiva di f.

Teorema fondamentale del Calcolo Integrale – II parte.

Sia $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ e sia $G \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ una sua primitiva, $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

Allora, $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

dim. Sia $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. Per T.F.C.I.–1, F è una primitiva di f. Allora, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow (F-G)'(x) = 0$, quindi $F(x) - G(x) = c$ è costante $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = (G(b)+c) - (G(a)+c) = G(b) - G(a)$

Teorema d'integrazione per parti.

Siano $f, g \in C^1([a,b], \mathbb{R})$. Allora,

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(b) \cdot g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Notazione: $G(b) - G(a) = [G]_a^b = [G]_{a=x}^b = [G(x)]_{x=a}^b = \dots$

dim. $\forall x \in [a,b] \Rightarrow (f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b (f \cdot g)'(x)\, dx = \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

$\Vert$ ← per T.F.C.I. (2): fg è primitiva di $(fg)'$.

$(fg)(b) - (fg)(a) = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a)$ ∎

Teorema d'integrazione per sostituzione.

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo; $f \in C(I, \mathbb{R})$; $\varphi \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq I$. Allora,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx.$$

Se inoltre φ è strettamente crescente e $a, b \in I$, allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

dim. Siano $G(x) = \int_\alpha^x f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$ e $H(x) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(s)\, ds$,

$G, H : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Per T.F.C.I. 1, $G'(x) = f(\varphi(x))\, \varphi'(x)$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

$H = F \circ \varphi$, con $F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^{y} f(s)\, ds$, $F'(y) = f(y)$ per T.F.C.I. 1.

Derivando la composizione, $H'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ $= f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = G'(x)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Allora, $\forall x \in [\alpha, \beta]$:

$H(x) - G(x) = H(\alpha) - G(\alpha) = 0 - 0 = 0$ (perché $H - G$ è costante), quindi $H(\beta) = G(\beta)$ come desiderato.

La seconda asserzione segue facilmente ∎