Test di Prova

① Sia $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x))$ con $-\pi \le x \le \pi$.
Studiare f e tracciarne un grafico:
dominio; intervalli su cui f è continua, derivabile, crescente; limiti agli estremi.

② Calcolare $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

③ Calcolare
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg}(x)}{x^2}$$

④ Sia $\alpha \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si definisca $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_1^{\alpha(x)} \sin(t^2)\,dt.$$
Quale delle seguenti vale?

(a) $f'(x) = \displaystyle\int_1^{\alpha'(x)} \sin(t^2)\,dt$

(b) $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\alpha(t)} \cos(t^2) \cdot 2t\,dt$

(c) $f'(x) = \sin(\alpha(x)^2) \cdot \alpha'(x)$

(d) $f'(x) = \cos(\alpha(x)^2)$

NOTA SU ③: $\operatorname{arctg}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$

Svolgimento.

(1) Dominio$(f) = \{x : -\pi \leq x \leq \pi;\ x \neq -\pi/2, \pi/2\}$
$= [-\pi, -\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$.

f è continua (derivabile, infatti) su Dominio(f) e

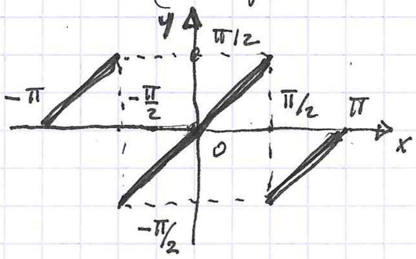
$$f'(x) = \frac{1}{1+tg^2(x)} \cdot (1 + tg^2(x)) = 1 \quad \forall x \in \text{Dominio}(f)$$

Poichè $f'(x) > 0$ $\forall x \in$ Dominio(f), f cresce su $[-\pi, -\pi/2)$, su $(-\pi/2, \pi/2)$ e su $(\pi/2, \pi]$.

Calcolo
$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x) = arctg(+\infty) = \pi/2$$
$$\lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x) = arctg(-\infty) = -\pi/2$$

e analogamente: $\lim_{x \to (-\pi/2)^-} f(x) = \pi/2$; $\lim_{x \to (-\pi/2)^+} f(x) = -\pi/2$.

Grafico di $y = f(x)$:



(2) Se uso la relazione $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$, ho che

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1 + \frac{\cos(2x)+1}{2}}\, dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+3}\, dx$$

pongo $y = \alpha(x) = \cos(2x)$, $dy = \alpha'(x)\, dx = -2 \cdot \sin(2x)\, dx$;
$\alpha(0) = 1$; $\alpha(\pi/4) = 0$; quindi

$$I = \int_1^0 \frac{-dy}{y+3} = \int_0^1 \frac{dy}{y+3} = \left(\log(y+3)\right)\Big|_0^1 = \log 4 - \log 3 = \log(4/3).$$

Se non la uso, pongo: $z = \beta(x) = \cos(x)$, quindi $dz = \beta'(x)\,dx = -\sin(x)\,dx$ e $\beta(0) = 1$, $\beta(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$:

$$I = \int_0^1 \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)+1}\,dx = -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{2z}{1+z^2}\,dz = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{2z}{1+z^2}\,dz$$

$$= \Big(\log(1+z^2)\Big)_{1/\sqrt{2}}^1 = \log 2 - \log(3/2) = \log(4/3)$$

③ E' un limite del tipo $(0/0)$. Sviluppo con Taylor:

$$\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg}(x) = x\cdot\big(1 - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\big) - \big(x - x^3/3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\big)$$

$$\boxed{\text{sapendo che } \operatorname{arctg}(x) = x - x^3/3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$$

$$= x + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - \big(x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\big) = \underset{x\to 0}{o}(x^2),$$

quindi $\left(\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg}(x)\right)/x^2 = \frac{\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2} = \underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$: il limite è $\boxed{0}$

④ $f(x) = \int_0^{\alpha(x)} \sin(t^2)\,dt = F(\alpha(x))$,

dove $F(y) = \int_0^y \sin(t^2)\,dt$; $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $F \in C^1$.

Per T.F.C.I., $F'(y) = \sin(y^2)$ e per il T. sulla derivata di una composizione:

$$f'(x) = F'(\alpha(x))\cdot\alpha'(x) = \sin(\alpha(x)^2)\cdot\alpha'(x),$$

la risposta è quindi (c).