Teorema di de l'Hôpital. Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$; $-\infty \leq a < b \leq +\infty$; $f, g$ derivabili in $(a,b)$; $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Se $\exists \lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$

o se $\exists \lim_{x \to a} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ e $\exists \lim_{x \to a} g(x) \in \{+\infty, -\infty\}$

e se $\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

allora

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

[Il Teorema vale anche considerando $x \to b$ invece che $x \to a$].

Esempi. (1) Può accadere che $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e non $\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Siano $f(x) = x^2 \cdot \sin(1/x)$ e $g(x) = x$; $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Abbiamo che $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin(1/x) = 0$ $\left( \begin{array}{l} x \to 0 \text{ e} \\ \sin(1/x) \text{ è limitata} \end{array} \right)$

Però, $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \cdot \sin(1/x) - x^2 \cdot \cos(1/x) \cdot (-1/x^2)}{1} = \cos(1/x) - 2x \cdot \sin(1/x)$

che non ha limite per $x \to 0$.

(2) Non sempre il Teorema è utile. Siano $f(x) = e^{-1/x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ e $g(x) = x$: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{-1/x}}{x}$; $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$.

Calcolare $\lim_{x \to 0^+} f'(x)/g'(x)$ non è più facile che calcolare $\lim_{x \to 0^+} f(x)/g(x)$.

Dim. (nel caso $a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$).

Pongo $f(a) = 0 = g(a)$. Sia $x \in (a,b)$. Allora: $f, g \in C^0([a,x], \mathbb{R})$ e sono derivabili in $(a,x)$. Per T. Cauchy, $\exists\, y(x) \in (a,x)$:

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(y(x))}{g'(y(x))}$; $x \to a \Rightarrow y(x) \to a \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y(x))}{g'(y(x))} \xrightarrow[x \to a]{} L$

## Derivata seconda e convessità.

**Def.** Sia $f \in C^1(I, \mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; $x_0 \in I$. Se $\exists \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f\right)(x_0)$, diciamo che $f$ è derivabile due volte in $x_0$ e $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \overset{df.}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f\right)(x_0)$ è la derivata seconda di $f$ in $x_0$.

Altre notazioni: $\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \ddot{y} = \ddot{f} = f'' = D^2 f = \dots$

**Def.** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$.

- $f$ è convessa in $I \iff$
  $\forall\, x < y$; $x, y \in I$; $\forall t \in [0,1) \Rightarrow f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t \cdot f(y)$
- $f$ è strettamente convessa in $I \iff$
  $\forall\, x < y$; $x, y \in I$; $\forall t \in (0,1) \Rightarrow f((1-t)x + ty) < (1-t) f(x) + t\, f(y)$.

**Def.** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$.

- $f$ è concava in $I \iff \forall\, x < y$; $x, y \in I$; $\forall t \in (0,1)$
  $\Rightarrow f((1-t)x + ty) \geq (1-t) \cdot f(x) + t \cdot f(y)$
- $f$ è strettamente concava se abbiamo $>$ invece di $\geq$.

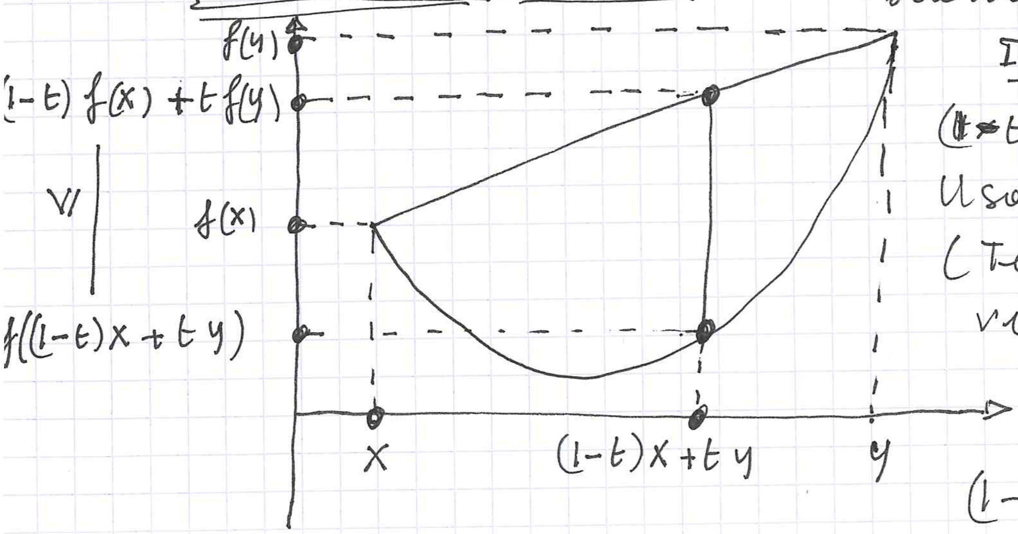


Illustrazione. Se $t \in (0,1)$
$(1-t)x + ty = x + t(y - x) \in (x, y)$
Usando le proporzioni (Teorema di Talete) vediamo che il punto del grafico di $f$ calcolata in $(1-t)x + ty$ deve stare sotto la retta che congiunge i punti del grafico di $f$: $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

<u>Teorema</u>. Sia $f: I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

(1) Se $f$ è convessa in $I$, allora $f \in C_0(I, \mathbb{R})$.

(2) Se $f$ è derivabile in $I$, allora
$f$ è convessa in $I \iff f'$ è crescente in $I$

(3) Se $f$ è derivabile in $I$, allora
$f$ è convessa in $I \iff f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.

Abbiamo anche l'importante:

<u>Proprietà</u>. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ strettamente convessa; $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.
Se $x_m$ è un punto di minimo per $f$ in $I$,
è ~~un~~ l'unico. Cioè $\forall x \in I \quad x \neq x_m \Rightarrow f(x) > f(x_m)$.

<u>Esempio</u>. $f(x) = |x|$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f$ è convessa su $\mathbb{R}$,
ma $f$ non è derivabile in $x = 0$.