# Polinomi e formule di Taylor.

**Def.** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.
La derivata n-esima di $f$ in $x_0$ è definita (se esiste) per induzione.

$f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$

$f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$

$f^{(2)}(x_0) = f''(x_0) \overset{df.}{=} (f')'(x_0)$

$f^{(3)}(x_0) = f'''(x_0) \overset{df.}{=} (f'')'(x_0) = (f')''(x_0)$

$\dots$

$f^{(n)}(x_0) \overset{df.}{=} (f^{(n-1)})'(x_0)$

Scrivo $f \in C^n(I, \mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, se $f^{(n)} \in C(I, \mathbb{R})$

**Oss.** Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f$ è un polinomio di grado $k \leq n$
$\iff \forall x \in \mathbb{R} \ \exists f^{(n+1)}(x) = 0$.

P. es. $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a \Rightarrow f'''(x) = 0$.

**Def.** Siano $x_0 \in I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo; e sia $f$ derivabile n-volte in $x_0$ ($n \in \mathbb{N}$). Il polinomio di Taylor di grado $n$ con centro in $x_0$ è

$$T^n_{x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

(è un polinomio di grado $\leq n$ rispetto alla variabile $x$).

**Esempi.**
$$T^0_{x_0} f(x) = f(x_0)$$
$$T^1_{x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$T^2_{x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

**Oss.** Ponendo $x - x_0 = h$, abbiamo:

$$T^n_{x_0} f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

Teorema. [Formula di Taylor con resto nella forma di Peano].
Siano $x_0 \in I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo; $f \in C^{n-1}(I, \mathbb{R})$, $\exists f^{(n)}(x_0)$.

Allora, $f(x) = T^n_{x_0} f(x) + R^n_{x_0} f(x)$ e $R^n_{x_0} f(x) = \underset{x \to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$,

cioè: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R^n_{x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - T^n_{x_0} f(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

dim. (Per induzione).
$n=0$ Se $f$ è continua in $x_0$, $f(x) = f(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(1)$
(a rigore, questo caso non rientra nelle ipotesi del T.).
$n=1$ Se $f$ è derivabile in $x_0$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x-x_0)$
è una delle equivalenti definizioni di derivata prima $f'(x_0)$.
Supponiamo che il T. valga per $n=k-1$ e consideriamo il caso $n=k$. Considero le funzioni
$g(x) = f(x) - T^k_{x_0} f(x)$ e $h(x) = (x-x_0)^k$.
Ho che $h, g \in C^1(I, \mathbb{R})$; $h(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0 = h(x_0)$: le ipotesi del T. di de l'Hôpital valgono.
Osservo che $\dfrac{d}{dx} T^k_{x_0} f(x) = \dfrac{d}{dx}\Big[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots$

$\ldots + \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\Big] = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$

$\ldots + \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}\Big] = f'(x_0) + (f')'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{(f')''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$

$\ldots + \dfrac{(f')^{(k-1)}}{(k-1)!}(x_0)(x-x_0)^{k-1} = T^{k-1}_{x_0}(f')(x)$.

Per il T. di de l'Hôp., quindi,

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - T^k_{x_0} f(x)}{(x-x_0)^k} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - \frac{d}{dx}\left(T^k_{x_0} f\right)(x)}{k(x-x_0)^{k-1}}$ se questo secondo limite esiste

$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - T^{k-1}_{x_0}(f')(x)}{k(x-x_0)^{k-1}} = 0$, poiché $f'$ soddisfa le Hp. del Teorema con $n=k-1$. ∎

**Teorema.** (Formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange).

Siano $x_0 \in I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo; $f \in C^{(n+1)}(I, \mathbb{R})$.

Allora, $\forall\, x \in I \ \exists\ \theta(x)$ tra $x_0$ e $x$ t.c.

$$f(x) = T^n_{x_0} f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};$$

cioè, $R^n_{x_0} f(x) := f(x) - T^n_{x_0} f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

*dim.* Lo mostro per $n=2$: la dimostrazione generale si può fare per induzione. Sia $x = x_1 \in I$:

$$\frac{f(x_1) - T^2_{x_0} f(x_1)}{(x_1 - x_0)^3} = \frac{h_1(x_1)}{g_1(x_1)} = \frac{h_1(x_1) - h_1(x_0)}{g_1(x_1) - g_1(x_0)}$$

con $h_1, g_1$ che soddisfano le Hp. di T. LAGRANGE

$$= \frac{h_1'(x_2)}{g_1'(x_2)} = \frac{f'(x_2) - T^1_{x_0}(f')(x_2)}{3(x_2-x_0)^2} = \frac{f'(x_2) - [f'(x_0) + f''(x_0)(x_2 - x_0)]}{3 \cdot (x_2 - x_0)^2}$$

per T. Lagrange, con $x_2$ tra $x_0$ e $x_1$

$$= \frac{h_2(x_2)}{g_2(x_2)}$$

con $h_2, g_2$ che soddisfano le Hp. di T. Lagrange

$$= \frac{h_2(x_2) - h_2(x_0)}{g_2(x_2) - g_2(x_0)} = \frac{h_2'(x_3)}{g_2'(x_3)}$$

per T. Lagrange, con $x_3$ tra $x_0$ e $x_2$

$$= \frac{f''(x_3) - T^0_{x_0}(f'')(x_3)}{3!\,(x_3 - x_1)} = \frac{f''(x_3) - f''(x_0)}{3!\,(x_3 - x_0)} =$$

uso ancora T. Lagrange con $x_4$ tra $x_0$ e $x_3$

$$= \frac{f'''(x_4)}{3!}:$$

confrontando con l'inizio e ponendo $x_4 = \theta(x)$ (tra $x_0$ e $x$) ho

$$f(x) = T^2_{x_0} f(x) + \frac{f'''(\theta(x))}{3!}(x - x_0)^3,$$

come desiderato ■