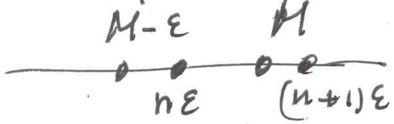
<u>Non esistono infinitesimi in $\mathbb{R}$.</u>

<u>Teorema</u> (Archimede). Sia $\varepsilon > 0$.
L'insieme $\{n\varepsilon : n \in \mathbb{N}\}$ è illimitato.
<u>Corollario</u> $\forall \varepsilon > 0 \ \forall A > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > A$.

<u>Dim.</u> <u>Teo.</u> Sia $\mathbb{N}_\varepsilon = \{n\varepsilon : n \in \mathbb{N}\}$.
Se $\mathbb{N}_\varepsilon$ fosse limitato, $\exists \sup \mathbb{N}_\varepsilon = M \in \mathbb{R}$, $M > 0$. Allora, $M - \varepsilon < M$ <u>non</u> è maggiorante di $\mathbb{N}_\varepsilon$, quindi esiste $x \in \mathbb{N}_\varepsilon$ t.c.

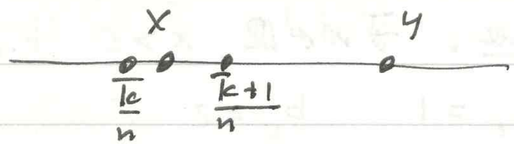


$M - \varepsilon < x \leq M$,
cioè $\exists n \in \mathbb{N} : M - \varepsilon < n\varepsilon \leq M$.
Allora, $M < n\varepsilon + \varepsilon = (n+1)\varepsilon \in \mathbb{N}_\varepsilon$, cioè M non è maggiorante di $\mathbb{N}_\varepsilon$, assurdo ∎

<u>Dim.</u> <u>Corollario</u>. $A > 0$ non può essere maggiorante di $\mathbb{N}_\varepsilon$, cioè $\exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > A$ ∎

<u>Proprietà</u> (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$).
$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x < y \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Q} : x < p < y$.

<u>Dim.</u>



Sia $n \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < \frac{1}{n} < y - x$
(trovo tale n chiedendo $n \cdot (y-x) > 1$ e usando il corollario sopra).
Sia $B = \{k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} \leq x\}$.
B è superiormente limitato
(usare ancora il corollario se $x > 0$, altrimenti $k = 0$ è un maggiorante),
quindi ha un <u>massimo</u>
(trattandosi di $B \subseteq \mathbb{Z}$, gli insiemi sup. lim. hanno MAX.),
$\bar{k} = \mathrm{MAX}\{k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} \leq x\}$.
Ne segue che $\frac{\bar{k}+1}{n} > x$, ~~ma~~ e che $y - \frac{\bar{k}+1}{n} = y - \frac{\bar{k}}{n} - \frac{1}{n} \geq y - x - \frac{1}{n} > 0$,
per la scelta di n. Cioè,

$$x < \frac{\bar{k}+1}{n} < y \ ∎$$

Teorema. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x>0$ t.c. $x^2 = 2$

Dim. $a_0 = 1 \qquad b_0 = 2$

$a_1 = 1.4 \qquad b_1 = 1.5$

$a_2 = 1.41 \qquad b_2 = 1.42$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$$a_n = \mathrm{MAX}\left\{\frac{k}{10^n} : k \in \mathbb{N},\ \left(\frac{k}{10^n}\right)^2 \leq 2\right\}$$

$$b_n = \min\left\{\frac{h}{10^n} : h \in \mathbb{N},\ \left(\frac{h}{10^n}\right)^2 \geq 2\right\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}:\quad a_n^2 < 2 < b_n^2$ e

$$b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n)$$

$$\leq \frac{2}{10^n} \cdot 4 = \frac{8}{10^n},\quad \text{quindi}$$

$$2 - \frac{8}{10^n} \leq b_n - \frac{8}{10^n} \leq a_n^2 < 2$$

Cioè, $\sup\{a_n^2 : n \in \mathbb{N}\} = 2$ (esercizio).

Ora, $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < a_n \leq \sup\{a_m\}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n^2 \leq [\sup\{a_m\}]^2$

$\Rightarrow \sup\{a_n^2\} \leq (\sup\{a_n\})^2$.

Sia $x = \sup\{a_n\}$, abbiamo allora

$$2 \leq x^2.$$

Allo stesso modo, se $y = \inf\{b_n\}$,

$$y^2 \leq 2,$$

ma chiaramente (esercizio)

$$0 < x \leq y,$$

dunque $x^2 \leq y^2$, da cui $x^2 = y^2 = 2$.

cioè $[\sup\{a_n\}]^2 = 2$ ∎

Teorema (che non dimostriamo! si generalizza la dimostrazione vista sopra).

$$\underset{a \in \mathbb{R}}{\forall a \geq 0}\quad \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall n \geq 1}\quad \underset{x \geq 0}{\exists!\, x \in \mathbb{R}} : \boxed{x^n = a}$$

$x = \sqrt[n]{a}$ è la radice n-esima di a.

Nota. Quando scrivo $\sqrt[n]{a}$, do per scontato che (1) $a \geq 0$; (2) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; (3) $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

Non si accetta $\sqrt[2]{1} = -1$ (quindi neanche $\sqrt[2]{x^2} = x$); ma neanche $\sqrt[3]{-1} = -1$, tranne che in casi eccezionali

Esercizi (Facoltativi).

(1) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\sup A \in \mathbb{R}$.
Allora $(\sup A)^2 = \sup\{x^2 : x \in A\}$.

(2) Vero o falso:

(i) $\sup A + \sup B = \sup\{a+b : a \in A, b \in B\}$
(se A, B superiormente limitati)

(ii) $\sup A \cdot \sup B = \sup\{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$
(se A, B superiormente limitati).