Prova scritta complessiva di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile-Architettura, 19 gennaio 2011

Nome..**Cognome**.. **Matricola**................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno (Cancellare la voce che non interessa).

(1) [**10 pti**] Sia

$$f(x) = \left[|x^2-9| + (x^2-9)\right] \cdot e^{-x^2}, \; x \in \mathbb{R}.$$

(1.1) Trovare il dominio di f; i limiti agli estremi del dominio di f e il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ su cui f è continua.

(1.2) Trovare il sottoinsieme B di $\mathbb{R}$ su cui f è derivabile e calcolare $f'(x)$ per $x \in B$.

(1.3) Trovare gli intervalli di $\mathbb{R}$ su cui f è crescente. Trovare i punti di massimo relativo e i punti di massimo per f.

(1.4) Tracciare un grafico qualitativo di f.

(2) [**4 pti**]Sia $f, \alpha \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e si definisca

$$G(x) = \int_{\alpha(\sin(5x))}^{2} f(\sin(x))dx.$$

Calcolare $F'(x)$ per x in $\mathbb{R}$.

(3) **[4 pti]**Calcolare l'integrale

$$I = \int_1^{e^{\frac{17\pi}{2}}} \log(\sqrt[17]{t}) \cos(\log(\sqrt[17]{t})) \frac{dt}{t}.$$

(4) **[4 pti]**Calcolare:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1-\frac{7x}{2}}{1+e^{-7x}} - \frac{1}{2}}{x \sin(2x) \cos(x)}.$$

(5) **[4 pti]**Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 + 12iz^2 - 35 = 0.$$

$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot (1-i)$

$z_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot (1-i)$

(6) **[4 pti]**Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua, $f(1) = f(-1) = 1/2$. Quali delle seguenti conclusioni *segue* necessariamente dalle ipotesi?

- Non esiste $x \in [-1,1]$ tale che $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
- Esiste $x \in [-1,1]$ tale che $x \cdot f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
- Esiste $x \in [-1,1]$ tale che $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
- Esiste $x \in [-1,1]$ tale che $f'(x) = 0$.

(7) **[3 pti]**Calcolare

$$\lim_{n \to \infty} \left[\pi \frac{(n-6)! \cdot (n+6)!}{(n^2-36)!} + e \frac{(n+6)!}{n! \cdot 6^n} + \sqrt{8} \frac{(n+6)!}{n! \cdot n^6} \right] = \sqrt{8}$$

AM1 – I) Esercizi (1), (2), (3), (4): vedi Prove Parziali.

(5) Pongo $w = z^2$: $w^2 + 12i\cdot w - 35 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 36i^2 + 35 = -36 + 35 = -1 = i^2$$

$$w = -6i \pm i = -5i, -7i$$

$$z^2 = -5i = 5\cdot e^{-i\pi/2} \iff z = \pm\sqrt{5}\cdot e^{-i\pi/4} =$$

$$= \pm\sqrt{5}\cdot\left[\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)\right]$$

$$= \pm\sqrt{\frac{5}{2}}(1-i)$$

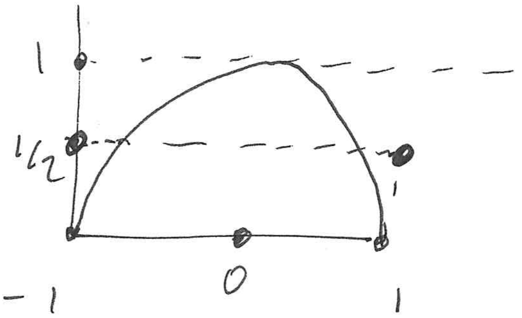
$$z^2 = -7i = 7\cdot e^{-i\pi/2}$$

$$\Updownarrow$$

$$z = \pm\sqrt{7}\cdot e^{-i\pi/4}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{7}{2}}(1-i)$$

(6)



Le ipotesi non implicano la prima, né la terza risposta. La quarta presuppone la derivabilità di f, che non è nelle ipotesi.

Pongo $g(x) = x\cdot f(x) - \sqrt{1-x^2}$; $g \in C([-1,1],\mathbb{R})$;

~~$g(-1) = -\frac{1}{2} - \sqrt{1-\frac{1}{4}} < 0 < \frac{1}{2}$~~

$$g(-1) = (-1)\cdot\frac{1}{2} - \sqrt{1-(-1)^2} = -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} - \sqrt{1-1^2} = g(1),$$

quindi $\exists\, x \in [-1,1] : g(x) = 0$: la terza vale.

~~Potevo anche osservare che~~

~~(7)~~ $\cancel{\dfrac{(n-6)!\,(n+6)!}{(n^2-36)!} = \dfrac{\overbrace{(n-6)\cdots 2\cdot 1}^{n-6}\cdot\overbrace{(n+6)\cdots 2\cdot 1}^{n+6}}{\underbrace{(n^2-36)\cdots(n^2-42+1)}_{n-6}\cdot(n^2-42)\cdots(n^2-48+1)}}$

Es. 7. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-6)!\,(n+6)!}{(n^2-36)!} = 0$

Infatti, $(n-6)!\cdot(n+6)!$ ha $2n$ fattori minori o uguali a $n+6$;

mentre $(n^2-36)!$ ha $2n$ fattori maggiori o uguali di $n^2-2n+35 \geq 2n$ (se n è grande), e rimangono i fattori di $(n^2-2n-36)!$

Cioè:

$$0 \leq \frac{(n-6)!\,(n+6)!}{(n^2-36)!} \leq \frac{1}{(n^2-2n-36)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+6)!}{n!\cdot 6^n} = 0.$

Infatti, $\frac{(n+6)!}{n!\cdot 6^n} = \frac{(n+6)\cdot(n+5)\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot n!}{n!\;6^n} =$

$= \frac{(n+6)\cdot\ldots\cdot(n+1)}{6^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ per confronto tra polinomi e esponenziali.

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+6)!}{n!\cdot n^6} = 1.$

Infatti, $\frac{(n+6)!}{n!\cdot n^6} = \frac{(n+6)\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot \cancel{n!}}{n^6\cdot\cancel{n!}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\cdot\ldots\cdot 1 = 1,$

facendo il compito dei fattori.

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}[\cdot] = \pi\cdot 0 + e\cdot 0 + \sqrt{8}\cdot 1 = \sqrt{8}.$$