II prova parziale scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile-Architettura, 2010/11

Nome...**Cognome**... **Matricola**................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno (Cancellare la voce che non interessa).

(1) [pt] Studiare $f(x) = xe^{\frac{|x^2-4|}{x-2}}$

- Trovare il dominio di f, il sottoinsieme del dominio su cui f è continua e i limiti agli estremi degli intervalli su cui f è continua. $\text{Dominio}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2\cdot e^{-4}$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2\cdot e^{4}$

f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

- Trovare i punti in cui la funzione è derivabile e calcolarne la derivata.

f è derivabile in $\text{Dominio}(f) \setminus \{-2\} = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$

e $f'(x) = e^{|x+2|\cdot \text{segno}(x-2)} \cdot [1 + x \cdot \text{segno}(x^2-4)]$

- Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

f cresce su $[-2, 1]$ e su $(2, +\infty)$

e decresce su $(-\infty, -2]$ e su $[1, 2)$

- Trovare punti di max e min rel e ass. Determinare $f([-2, 1])$.

$x = -2$ è p.to di minimo; $x = 1$ è p.to di massimo relativo.

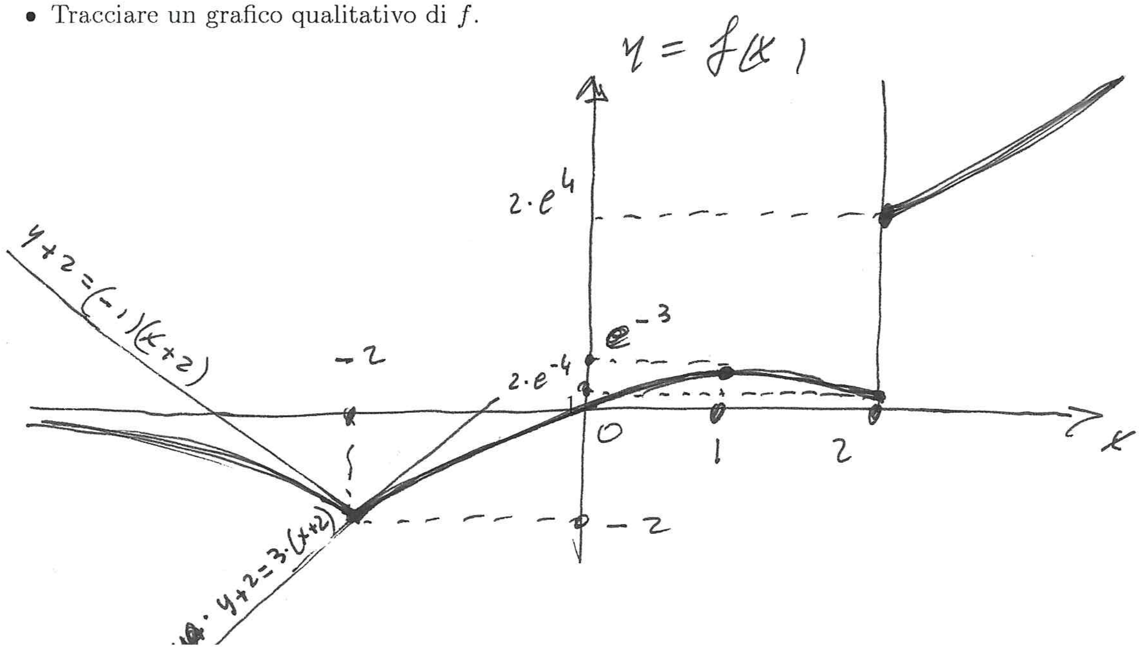
$f([-2, 1]) = [-2, e^{-3}]$

- Trovare le rette tangenti al grafico di f da destra e da sinistra in $x = -2$.

Da sinistra: $y+2 = (-1)(x+2)$

Da destra: $y+2 = 3\cdot(x+2)$

- Tracciare un grafico qualitativo di f.



(2) [pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)\sin(2x^3)e^{2x+3}\cos(7x^2)}{\sin(3x)-e^{3x}-cos(3x)+2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}\cdot e^3}{9}$$

(3) [4 pt.] Siano $\alpha, \beta, f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ponendo $G(x) = \int_{\alpha(cos(3x))}^{\beta(\sin^2(3x))} f(\tan(3t))dt$ e sapendo che $\alpha(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \beta(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{18}$ calcolare $G'(\frac{\pi}{12})$.

$$G'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left[\beta'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \alpha'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

solo prova comp.

(4) [pt] Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $f(0) = 4$, $f(1) = -1$, $g(0) = -2$, $g(1) = +3$. Quale delle seguenti affermazioni *segue necessariamente* da queste ipotesi?

- X Esiste x in $[0,1]$ tale che $f^2(x)g(x) = 0$.
- Esiste x in $[0,1]$ tale che $f(x) + g(x) = 0$.
- Non esiste I intervallo, $I \subset [0,1]$ tale che per ogni x appartenente a I si ha $f(x) + g(x) = 1$.
- Per ogni x in $[0,1]$ si ha che $f(x) + g(x) > 0$.

(5) [pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione: $(z^2 + (2 - i5)z - i10)(i^5 z^6 - 4)$

$z = -2; \; z = 5i$

$$z = \sqrt[3]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + k\pi/3\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} + k\pi/3\right)\right] \qquad k \in \mathbb{Z},\ 0 \le k \le 5$$

(6) [pt] Calcolare

$$\int_{\ln 2}^{\ln(3)} e^{3x}\ln(e^{6x}-4)dx$$

$$\frac{1}{3}\left[y \cdot \ln(y^2-4)\right]_8^{27} - \frac{2}{3}\cdot(27-8) + \frac{2}{3}\cdot\left[\ln(y-2) - \ln(y+2)\right]_8^{27}$$

AM1 - Prof. (1) $f(x) = x \cdot e^{\frac{|x^2-4|}{x-2}}$. 1

Dominio: $x \neq 2$; f è continua nel dominio.

Osservo che $\frac{|x^2-4|}{x-2} = \frac{|(x-2)(x+2)|}{x-2} = \frac{|x-2|}{x-2} \cdot |x+2| =$

$= \text{segno}(x-2) \cdot |x+2|$: $\boxed{f(x) = x \cdot e^{|x+2| \cdot \text{segno}(x-2)}}$

Calcolo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot e^{+\infty \cdot (+1)} = +\infty$ e

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \cdot e^{+\infty \cdot (-1)} = -\infty \cdot e^{-\infty}$

E' una forma d'indeterminazione, ~~che~~ che affronto:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{|x+2|}} = 0$ (confronto polinomi con esponenziali).

Calcolo: $\lim_{x \to +2^+} f(x) = +2 \cdot e^{4 \cdot 1} = 2 \cdot e^4$

$\lim_{x \to +2^-} f(x) = +2 \cdot e^{4 \cdot (-1)} = 2 \cdot e^{-4}$

La derivata esiste per $x \neq 2, -2$ (almeno):

$f'(x) = e^{|x+2| \cdot \text{segno}(x-2)} \cdot (1 + x \cdot \text{segno}(x+2) \cdot \text{segno}(x-2))$

$= e^{|x+2| \cdot \text{segno}(x-2)} \cdot (1 + x \cdot \text{segno}(x^2-4))$

Poiché $\lim_{x \to -2^-} f'(x) = (1 - 2 \cdot (+1)) = -1 \neq 3 = (1 - 2 \cdot (-1)) = \lim_{x \to -2^+} f'(x)$,

ho che f non è derivabile in $x = -2$.

$f'(x) \geq 0 \iff 1 + x \cdot \text{segno}(x^2-4) \geq 0 \iff \begin{cases} |x| \geq 2 \\ 1 + x \geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x < -2 \text{ o } x > 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$ o $\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \iff x \in (2, +\infty) \cup (-2, 1]$.

f cresce su $(-2, 1]$ e su $(2, +\infty)$.

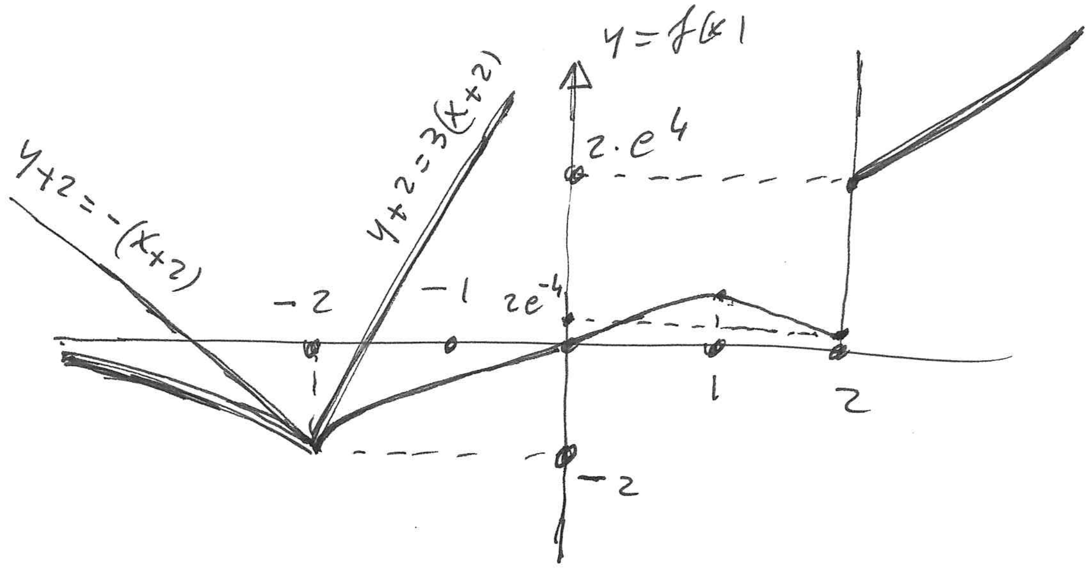
Dal precedente calcolo sui limiti di f' in $x=-2$, (2

ho che il grafico di f ha in $x=-2$:

tangente sinistra: $y-(-2) = -1\cdot(x-(-2))$; $y+2 = -(x+2)$

tangente destra: $y+2 = 3\cdot(x+2)$

Traccio il grafico di f con le informazioni che ho:



$x=-2$ è p.to di minimo, $x=1$ è p.to di max. relativo.

Poichè f cresce in $[-2,1]$, $f([-2,1]) = [f(-2), f(1)] = [-2, e^{-3}]$.

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \underset{x\to 0}{o(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \underset{x\to 0}{o(1)}$; $\sin(2x^3) = 2x^3 + \underset{x\to 0}{o(x^3)}$;

$e^{2x+3} = e^3 + \underset{x\to 0}{o(1)}$; $\cos(7x^2) = 1 + \underset{x\to 0}{o(1)}$. $\Rightarrow \mathrm{Num}(x) = 2x^3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^3(1+o(1))$

$$\mathrm{Den}(x) = \sin(3x) - e^{3x}\cos(3x) + 2 = \left[3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)\right]$$
$$-\left[1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)\right] - \left[1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^3)\right] + 2$$
$$= (3x)^3\cdot\left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + o(x^3) = -\frac{2\cdot 3^3}{3!}x^3(1+o(1)) = -9x^3(1+o(1))$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Num}(x)}{\mathrm{Den}(x)} = \frac{x^3\cdot\sqrt{2}\cdot e^3\cdot(1+o(1))}{-9\cdot x^3\cdot(1+o(1))} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{\sqrt{2}\cdot e^3}{9}$$

3) $G(x) = \int_{\alpha(\cos(3x))}^{\beta(\sin^2(3x))} f(\tan(3t))\,dt \Rightarrow$ (Per T.F.C.I. e derivando composizioni (3

$$G'(x) = f(\tan(3t))\Big|_{t=\beta(\sin^2(3x))} \cdot \frac{d}{dx}[\beta(\sin^2(3x))]$$

$$- f(\tan(3t))\Big|_{t=\alpha(\cos(3x))} \cdot \frac{d}{dx}[\alpha(\cos(3x))]$$

$$= f\Big(\tan\big(3\cdot\beta(\sin^2(3x))\big)\Big) \cdot \beta'(\sin^2(3x)) \cdot 2\cdot\cos(3x)\cdot\sin(3x)\cdot 3$$

$$- f\Big(\tan\big(3\cdot\alpha(\cos(3x))\big)\Big) \cdot \alpha'(\cos(3x)) \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3$$

Devo sostituire $x = \frac{\pi}{12}$. Osservo che $\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e $\sin(3x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

Quindi che $\beta(\sin^2(3x)) = \beta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{18}$ e $\alpha(\cos(3x)) = \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{18}$

$\Rightarrow \tan(3\beta\sin^2(3x)) = \tan\left(3\cdot\frac{\pi}{18}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} =$

$= \tan(3\cdot\alpha(\cos(3x))$, quindi

$$G'\left(\frac{\pi}{12}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\beta'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot \cancel{3} - f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\alpha'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

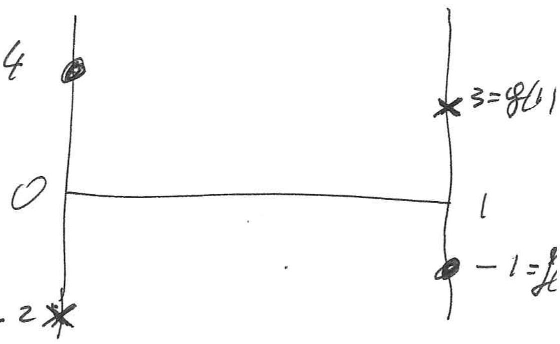
$$= 3 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left[\beta'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\alpha'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

AM1 - Tot

4) • Poiché f, g sono continue in $[0,1]$, per T. zeri ho ~~che~~ $\exists c \in [0,1]$: $f(c) = 0$

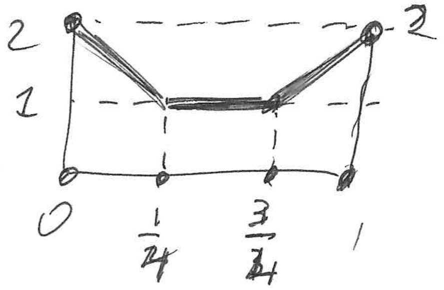
$\Rightarrow f^2(c)\cdot g(c) = 0\cdot g(c) = 0$;

La prima risposta è corretta.



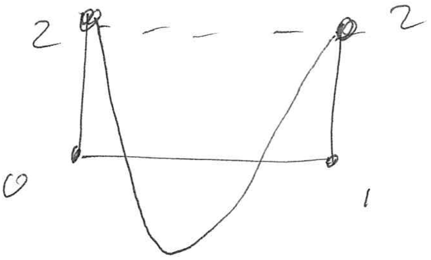
• $(f+g)(0) = 4-2 = 2$ e $(f+g)(1) = -1+3 = 2$: nulla mi dice che la seconda risposta sia corretta (e infatti, se prendete f e g della forma $y = mx+q$, vedete che $f(x)+g(x) = 2 \neq 0$ $\forall x \in [0,1]$).

• So che $(f+g)(0)=2=(f+g)(1)$, ma potrebbe benissimo essere che $f+g\equiv 1$ su qualche intervallo:



(P. es., poniamo
$$f(x)+g(x)=\begin{cases}1 \text{ se } \frac{1}{4}\le x\le 3/4\\ 2-4x \text{ in } [0,1/4]\\ 2+4(x-1) \text{ in } [3/4,1]\end{cases}$$
come in figura e f nella forma $y=mx+q$, cioè: $f(x)=4-5x$. Si verifica che le ipotesi sono verificate, ma non l'affermazione della terza frase).

••



← potrebbe succedere questo (come prima, possiamo anche fare esempi concreti).

$f+g$

(5) Poiché $-10i=2\cdot(-5i)$, ho che $z^2+(2-5i)z-10i=$
$$= z^2+2z+(-5i)z+2\cdot(-5i)=(z+2)(z-5i)=0 \iff z=-2 \text{ o } z=5i$$
(Oppure usate la formula solita).

Avendo che $i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$, voglio $iz^6-4=0$ cioè $z^6+4i=0$, $z^6=-4i=e^{-i\pi/2}\cdot 4$

Quindi, $z=\sqrt[6]{4}\cdot e^{\frac{1}{6}\left(-i\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ $k\in\mathbb{Z}$, $0\le k\le 5$;

$$=\sqrt[3]{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(+\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)\right] \quad k\in\mathbb{Z},\ 0\le k\le 5$$

(6) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{3x} \cdot \ln(e^{6x}-4)\,dx =$ $\quad y = e^{3x};\ dy = 3 \cdot e^{3x}dx$ (5

$x \Big|_{\ln(2)}^{\ln(3)} \Longrightarrow y \Big|_{e^{3\ln(2)} = 2^3 = 8}^{e^{3\ln(3)} = 3^3 = 27}$

$= \int_8^{27} \ln(y^2-4)\,\frac{dy}{3} = \frac{1}{3} \cdot \int_8^{27} [\ln(y+2) + \ln(y-2)]\,dy$

$= \frac{1}{3}\left[y\ln(y+2) + y\ln(y-2)\right]_8^{27} - \frac{1}{3}\int_8^{27} \frac{y}{y+2} + \frac{y}{y-2}\,dy$

$= \frac{1}{3}\left[y\ln(y^2-4)\right]_8^{27} - \frac{1}{3}\int_8^{27}\left(1 - \frac{2}{y+2} + 1 + \frac{2}{y-2}\right)dy$

$= \frac{1}{3}\left[y\ln(y^2-4)\right]_8^{27} - \frac{2}{3}(27-8) + \frac{2}{3}\left[-\ln(y+2) + \ln(y-2)\right]_8^{27}$