II prova parziale scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile-Architettura, 19 gennaio 2011

Nome..**Cognome**.. **Matricola**................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno

(Cancellare la voce che non interessa).

(1) **[15 pti]** Sia

$$f(x) = \left[|x^2 - 16| + (x^2 - 16)\right] \cdot e^{-2x^2}, \; x \in \mathbb{R}.$$

(1.1) Trovare il dominio di f; i limiti agli estremi del dominio di f e il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ su cui f è continua.

Dominio$(f) = \mathbb{R}$; $f \in C(\mathbb{R})$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

(1.2) Trovare il sottoinsieme B di $\mathbb{R}$ su cui f è derivabile e calcolare $f'(x)$ per $x \in B$.

Dominio$(f') = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$. $f'(x) = 0$ se $|x| < 4$

$f'(x) = 2x \cdot (33 - 2x^2) \cdot e^{-2x^2}$ se $|x| > 4$

(1.3) Trovare le rette tangenti da destra e da sinistra al grafico di f nei punti $x = 4$ e $x = -4$.

$y = 8 \cdot e^{-32} \cdot (x - 4)$: da destra in $x = 4$; $y = 0$: da sinistra in $x = 4$

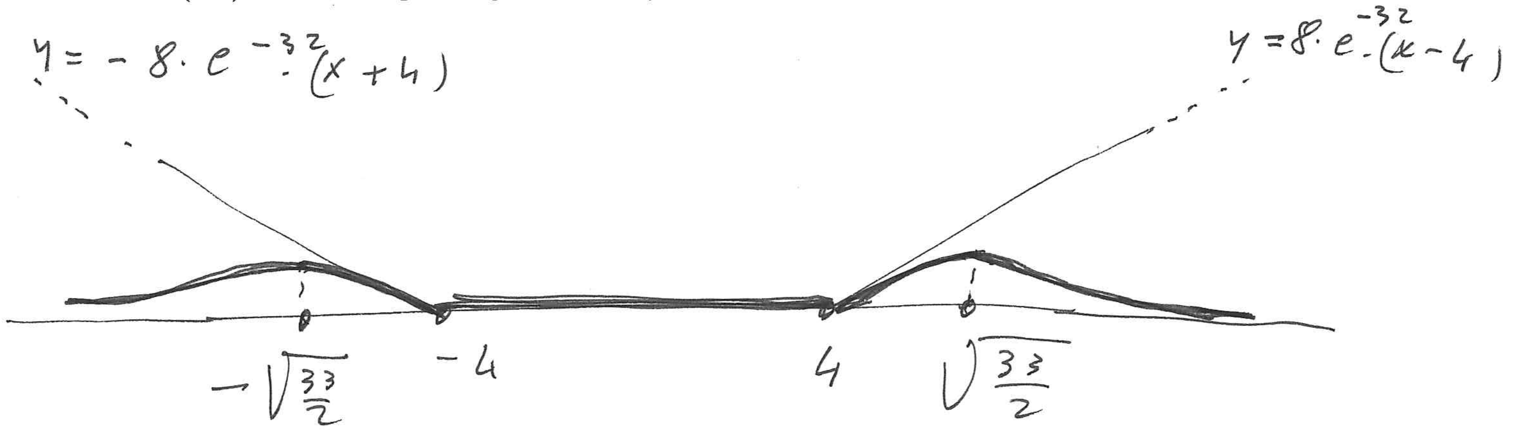
$y = 0$: da destra in $x = -4$; $y = -8 \cdot e^{-32} \cdot (x - 4)$: da sinistra in $x = -4$

(1.4) Trovare gli intervalli di $\mathbb{R}$ su cui f è crescente. Trovare i punti di massimo relativo e i punti di massimo per f.

f cresce su $(-\infty, -\sqrt{33/2}\,]$ e su $[-4, \sqrt{33/2}\,]$; cresce strettamente su $(-\infty, -\sqrt{\tfrac{33}{2}}\,[$ e $[4, \sqrt{\tfrac{33}{2}}\,]$

P.ti di MAX. rel. : $x = \pm\sqrt{33/2}$ e $-4 < x < 4$. P.ti di MAX. : $x = \pm\sqrt{33/2}$

(1.5) Tracciare un grafico qualitativo di f.



(2) **[6 pti]** Siano $f, \alpha \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si definisca

$$G(x) = \int_{\alpha(\sin(2x))}^{6} f(\sin(t))\,dt$$

Calcolare $G'(x)$ per x in $\mathbb{R}$.

$$G'(x) = -f(\sin(\alpha(\sin(2x)))) \cdot \alpha'(\sin(2x)) \cdot \cos(2x) \cdot 2$$

(3) **[6 pti]** Calcolare l'integrale

$$I = \int_1^{e^{\frac{21\pi}{2}}} \log(\sqrt[21]{t}) \cos(\log(\sqrt[21]{t})) \frac{dt}{t}.$$

$$I = 21 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

(4) **[6 pti]** Calcolare:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1 - \frac{3x}{2}}{1 + e^{-3x}} - \frac{1}{2}}{x \sin(13x) \cos(x)}. \quad = \frac{9}{104}$$

AM1 – PARZ 2 ESERCIZIO II

(1) $f(x) = [|x^2-16| + (x^2-16)] \cdot e^{-2x^2}$ è definita su $\mathbb{R}$ e ivi continua. Osservo che $|x^2-16|+(x^2-16) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^2-16 \le 0 \\ 2(x^2-16) & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -4 \le x \le 4 \\ 2\cdot(x^2-16)\cdot e^{-2x^2} & \text{se } x \le -4 \lor x \ge 4 \end{cases}$$

Studio f in $(-\infty,-4] \cup [4,+\infty)$.

Inoltre, f è pari: $f(-x) = f(x)$; potrei studiarla in $[4,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2\cdot(x^2-16)}{e^{2x^2}} = 0$ per confronto tra polinomi e esponenziali (con $x^2 = y \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$).

(2) f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-4,+4\}$, certamente, e

$$f'(x) = 2\cdot[2x\cdot e^{-2x^2} + (x^2-16)\cdot e^{-2x^2}\cdot(-4x)] = 2x\cdot[1-2(x^2-16)]\cdot e^{-2x^2}$$
$$= 2x\cdot(33-2x^2)\cdot e^{-2x^2} \quad \text{se } |x|>4.$$

Se $|x|<4$; $f'(x) = 0$. Poiché $\lim\limits_{x\to4^+} f'(x) = 8\cdot e^{-32} \neq \underset{\lim\limits_{x\to(4)^-} f'(x)}{0}$,

ho che f non è derivabile in $x=4$.

Allo stesso modo, non esiste $f'(-4)$ poiché

$\lim\limits_{x\to(-4)^-} f'(x) = -8\cdot e^{-32} \neq 0 = \lim\limits_{x\to(-4)^+} f'(x)$. $\boxed{\text{Dominio}(f') = \mathbb{R}\setminus\{-4;4\}}$

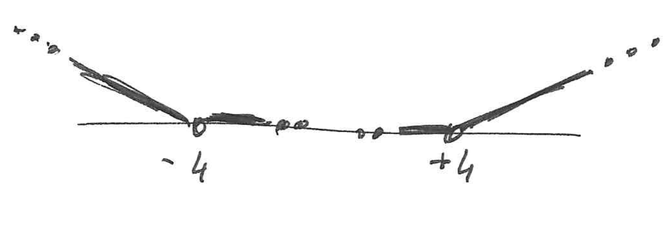
(3) Poiché $f(4) = 0 = f(-4)$, ho che le tangenti richieste sono:

$y = 8\cdot e^{-32}\cdot(x-4)$: da destra in $x=4$

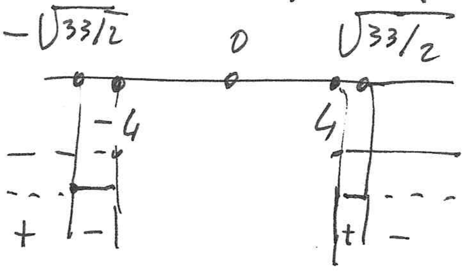
$y = 0$: da sinistra in $x=4$

$y = -8\cdot e^{-32}\cdot(x+4)$: da sinistra in $x=-4$

$y = 0$: da destra in $x=-4$



(4) Sia $|x|>4$: $f'(x) \geq 0 \iff 2x\cdot(33-2x^2) \geq 0$



$\iff +4 < x \leq \sqrt{33/2}$ o $-\infty < x \leq -\sqrt{33/2}$

Tenendo conto del fatto che f è continua su $\mathbb{R}$ e che $f(x)=0$ $\forall x \in [-4,4]$, ho che:

- f è crescente su $(-\infty, -\sqrt{33/2}]$ e su $[-4, \sqrt{33/2}]$
- f è decrescente su $[-\sqrt{33/2}, 4]$ e su $[\sqrt{33/2}, +\infty)$
- f è strettamente crescente su $(-\infty, -\sqrt{33/2}]$ e su $[4, \sqrt{33/2}]$
- f è strettamente decrescente su $[-\sqrt{33/2}, -4]$ e su $[\sqrt{33/2}, +\infty)$
- I punti $x \in \mathbb{R}$ con $-4<x<4$; $x=\sqrt{\frac{33}{2}}$ e $x=-\sqrt{\frac{33}{2}}$ sono p.ti di MAX. rel. per f.
- I punti $x = \pm\sqrt{\frac{33}{2}}$ sono p.ti di MAX. per f.

(5) Vedi foglio esercizi.

ESERCIZIO 2. $G(x) = -\int_6^{\alpha(\sin(2x))} f(\sin(t))\,dt$

$$x \longmapsto \sin(2x) = y \longmapsto \alpha(y) = z \longmapsto -\int_6^z f(\sin(t))\,dt$$

$2\cdot\cos(2x)$ $\qquad$ $\alpha'(y)$ $\qquad$ T.F.C.I. $-f(\sin(z))$

Per il T. sulla derivata di una composizione,

$$G'(x) = -f(\sin(\alpha(\sin(2x))))\cdot\alpha'(\sin(2x))\cdot\cos(2x)\cdot 2$$

ESERCIZIO 3. $I = \int_1^{e^{\frac{21}{2}\pi}} \log(\sqrt[21]{t}) \cdot \cos(\log(\sqrt[21]{t})) \frac{dt}{t}$

$$= \int_1^{e^{\frac{21}{2}\pi}} \frac{1}{21} \log(t) \cdot \cos\left(\frac{1}{21} \log t\right) \frac{dt}{t} =$$

$\frac{1}{21} \log(t) = s$; $ds = \frac{1}{21} \frac{dt}{t}$; $t\Big|_1^{e^{\frac{21}{2}\pi}} \Leftrightarrow s\Big|_0^{\pi/2}$

$$= \int_0^{\pi/2} s \cdot \cos(s) \cdot 21 \cdot ds =$$

$$= 21 \cdot \left\{ \left[s \cdot \sin(s) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(s) ds \right\} = 21 \cdot \left[s \cdot \sin(s) + \cos(s) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 21 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

ESERCIZIO 4. E' un limite $\frac{0}{0}$.

$\sin(13x) = 13x + \underset{x\to0}{o}(x)$; $\cos(x) = 1 + \underset{x\to0}{o}(1)$, quindi

$$x \sin(13x) \cdot \cos(x) = 13x^2 \cdot \left(1 + \underset{x\to0}{o}(1)\right)$$

Sviluppo il numeratore al II ordine:

$$\frac{1 - \frac{3}{2}x}{1 + e^{-3x}} - \frac{1}{2} = \frac{2 - 3x - (1 + e^{-3x})}{(1 + e^{-3x}) \cdot 2} = \frac{2 - 3x - (1 - 3x + \frac{9x^2}{2} + o(x^2))}{(1 + e^{-3x}) \cdot 2}$$

$$= \frac{\frac{9x^2}{2} + o(x^2)}{(1 + e^{-3x}) \cdot 2}.$$ Il limite è:

$$\lim_{x\to0} \frac{\frac{9x^2}{2} + o(x^2)}{13x^2 \cdot (1 + o(1))} \cdot \frac{1}{2 \cdot (1 + e^{-3x})} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{9/2 + o(1)}{13 + o(1)} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4 \cdot 2 \cdot 13} = \frac{9}{104}$$