

I) Quali delle seguenti valgono $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$?

- (1) $a > \frac{1}{a} \Rightarrow |a| > \frac{1}{|a|}$
- (2) $|a| > \frac{1}{|a|} \Rightarrow a > \frac{1}{a}$
- (3) $a > \frac{1}{|a|} \Rightarrow a > \frac{1}{a}$
- (4) $a > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{a^2 - 1}{a} > 0$
- (5) $a > \frac{1}{a} \Rightarrow a > 1$
- (6) $a > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{a}$
- (7) $a > \frac{1}{a} \Rightarrow a > 0$
- (8) $|a| > \frac{1}{|a|} \Leftrightarrow a^2 - 1 > 0$
- (9) $a > \frac{1}{a} \Leftrightarrow a(a^2 - 1) > 0$
- (10) $a > \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 > 1$
- (11) $a^2 < 1$ e $a < 0 \Rightarrow a > \frac{1}{a}$
- (12) $a \cdot (a^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 - a}{a + 1} > 0$
- (13) $\frac{a^2 + a}{a - 1} > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{a}$
- (14) $a > \frac{1}{a} \Rightarrow |a| > 1$

II) Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 3x + 1; \quad g(x) = x^2.$$

(1) f è invertibile? Suriettiva?

Se f è biunivoca, determinare f^{-1} .

(2) g è invertibile? Suriettiva?

Se g non è suriettiva, determinare $g|_{\mathbb{R}}$.

(3) Scrivere formule per $g \circ f$ e $f \circ g$.

$$g \circ f = f \circ g?$$

(4) Risolvere le equazioni

$$(4.i) f(x) = x \quad (4.ii) g(x) = x \quad (4.iii) f(x) = g(x)$$

(5) Mostrare che f "allontana x " dalle

soluzioni di (4.i): $\forall x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow |f(x) + \frac{1}{2}| > |x + \frac{1}{2}|$

Trovare una o più maniere grafiche

per rendere l'idea di ciò che succede.

(6) Sia $h = g|_{[0, +\infty)}$: cioè $h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{e } h(x) = g(x) \quad \forall x \geq 0.$$

h è invertibile? Se sì, determinare

$$h([0, +\infty)) \text{ e } h^{-1}: h([0, +\infty)) \rightarrow \mathbb{R}$$

(7) Trovare le formule per calcolare

$$(f \circ f)(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}.$$

(8) Usare (5) per mostrare che $|\int_0^1 f \circ f(x) + \frac{1}{2}| > |x + \frac{1}{2}|$
 $\forall x \neq -\frac{1}{2}$.