Correzione..

II prova complessiva scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile-Architettura, 15 giugno 2011

Nome.......................................**Cognome**.. **Matricola**...............

Prova orale verso: *domani* | *dopo il* 3 *luglio*.
(Cancellare la voce che non interessa).

(1) [pt] Studiare

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\log|x+2| & \text{se } x \neq -2, \\ 0 & \text{se } x = -2. \end{cases}$$

- Trovare il dominio di f, il sottoinsieme del dominio su cui f è continua e i limiti agli estremi degli intervalli su cui f è continua.

- Trovare i punti in cui la funzione è derivabile e calcolarne la derivata.

- Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

- Tracciare un grafico qualitativo di f.

(2) [pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(3x)} - e^{3x}}{x^3}$$

(3) [4 pt.] Calcolare $f'(x)$ per $x \in (-\pi/4, \pi/4)$, dove

$$f(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tan(2x)}{1-\tan^2(2x)}\right).$$

(Scrivere f' nella forma più semplice che si riesce a trovare).

(4) [pt] Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 (continue e con derivata continua). Supponiamo che $f'(0) = g(0) = 0$ e $f(1) = g'(1) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni *segue necessariamente* da queste ipotesi?

- Esiste $\int_0^1 f(g(x))g'(x)dx = \int_0^1 f(y)dy$.
- Esiste $\int_0^1 f(x)g'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx = 0$.
- Esiste $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx$.
- Esiste x in $[0,1]$ tale che $f(x) = g(x)$.

(5) [pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^4 + 8z^2 + 32.$$

(6) [pt] Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{10}} \sin(10x)e^{\sin(5x)}dx.$$

(6) [pt] Calcolare il limite di successione:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\pi\left(\frac{n}{n-1}\right)^n + e^{\frac{n+\frac{\log(n)}{n}}{n+\frac{\sin(n)}{n}}}\right]$$

AM I - 15/06/2011 (

(1.1) f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e definita su $\mathbb{R}$.

Poichè $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} (x+2)\log|x+2| = \lim_{y\to 0} y\log|y|$

$$\underset{y=1/z}{=} \lim_{z\to\infty} \frac{\log|1/z|}{z} = -\lim_{z\to 0}\frac{\log|z|}{z} = 0 = f(0),$$

ho che f è continua anche in $x=-2$: $\boxed{f\in C_1(\mathbb{R})}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

(1.2) f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e

$$f'(x) = \log|x+2| + (x+2)\cdot\frac{1}{|x+2|}\cdot \operatorname{sgn}(x+2) = \boxed{\log|x+2| + 1 = f'(x)}$$

Ho che $\lim_{x\to -2} f'(x) = -\infty$, quindi non esiste $f'(-2)$:

$$\boxed{\text{Dominio}(f') = \mathbb{R}\setminus\{-2\}}.$$

(1.3) $f'(x) = \log|x+2| + 1 \geq 0 \iff \log|x+2| \geq -1 \iff |x+2| \geq e^{-2}$

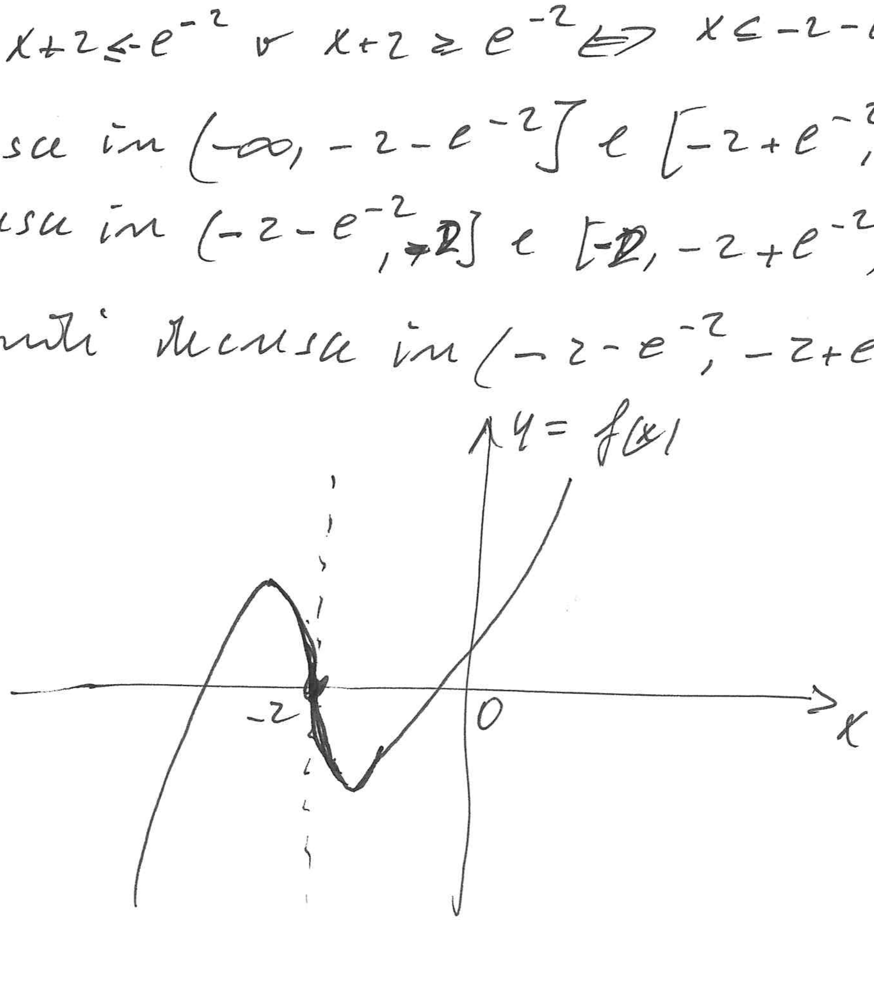
$\iff x+2 \leq -e^{-2} \lor x+2 \geq e^{-2} \iff x \leq -2-e^{-2} \lor x \geq -2+e^{-2}$:

f cresce in $(-\infty, -2-e^{-2}]$ e $[-2+e^{-2}, +\infty)$,

decresce in $(-2-e^{-2}, -2]$ e $[-2, -2+e^{-2})$ (perchè continua in $-2=x$),

quindi decresce in $(-2-e^{-2}, -2+e^{-2})$.

(1.4)



(2) $\dfrac{e^{\sin(3x)} - e^{3x}}{x^3} =$ (2

$$= \frac{1+\sin(3x) + \frac{\sin^2(3x)}{2} + \frac{\sin^3(3x)}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(\sin^3(3x)) - \left(1+3x+\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{1+3x-\frac{(3x)^3}{6}+\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)-\left(1+3x+\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{\frac{(3x)^3}{6}(-1+1-1)+o(x^3)}{x^3}$$

$$= -\frac{3^3}{6} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{3^3}{6} = \boxed{-\frac{9}{2}}$$

(3) $f'(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2\tan(2x)}{1-\tan^2(2x)}\right)^2} \cdot \dfrac{2(1-\tan^2(2x)) - 2\tan(2x)\cdot(-2\tan(2x))}{(1-\tan^2(2x))^2}$

$\cdot (1+tg^2(2x))\cdot 2$

$$= \frac{1}{2}\cdot \frac{(1-\tan^2(2x))^2}{(1-\tan^2(2x))^2+4\tan^2(2x)} \cdot 2 \cdot \frac{1-tg^2(2x)+2tg^2(2x)}{(1-tg^2(2x))^2}$$

$\cdot (1+tg^2(2x))^2\cdot 2$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{(1-Tg^2(2x))^2}{(1+tg^2(2x))^2}\cdot \frac{1+tg^2(2x)}{(1-tg^2 2x)^2}\cdot (1+tg^2(2x))$$

$= 2.$

(4) • $\int_0^1 f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(0)}^{g(1)} f(y)\,dy = \int_0^{g(1)} f(y)\,dy$, ma non so se $g(1)=1$: **Falso**.

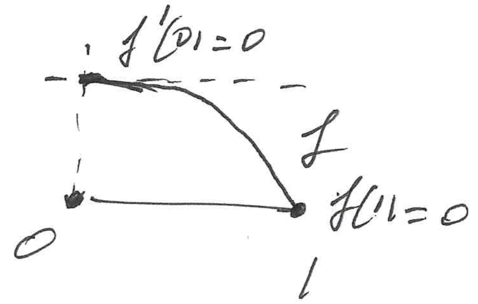
• $\int_0^1 f'(x)\,g(x)\,dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx$

$= f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx$

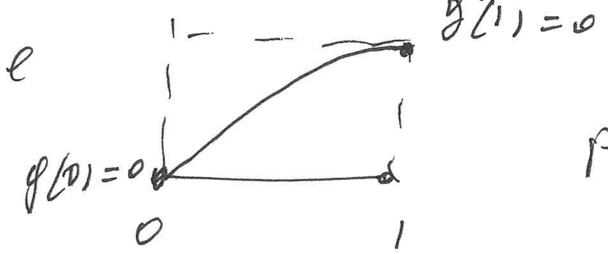
per le ipotesi, quindi: **Vero**.

• Quasi sempre **falso**!

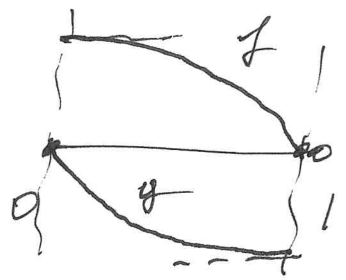
• Le ipotesi dicono:



e



potrei avere

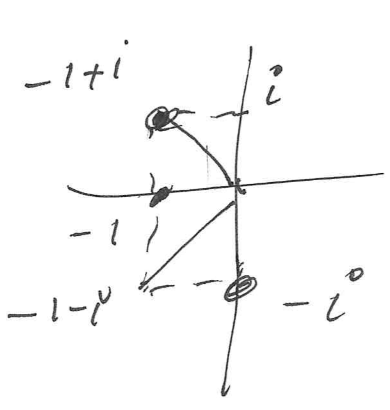


Falso

(5) $z^2 = w$: $w^2 + 8w + 32 = 0$ $\qquad \frac{\Delta}{4} = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$

$w = -4 \pm 4i = 4(-1 \pm i)$

$$\begin{cases} z^2 = -1 + i = \sqrt{2}\cdot e^{i\,3/4\,\pi} \\ z^2 = -1 - i = \sqrt{2}\cdot e^{-i\,3/4\,\pi} \end{cases}$$



$$\boxed{\begin{aligned} z &= \pm\sqrt[4]{2}\; e^{i\,3/8\,\pi} \\ z &= \pm\sqrt[4]{2}\cdot e^{-i\,3/8\,\pi} \end{aligned}}$$

(6) $\int_0^{\pi/10} \sin(10x)\cdot e^{\sin(5x)}\,dx = \int_0^{\pi/10} 2\sin(5x)\cdot\cos(5x)\cdot e^{\sin(5x)}\,dx$

$= \frac{1}{5}\left[2\sin(5x)\,e^{\sin(5x)}\right]_0^{\pi/10} - \frac{2}{5}\int_0^{\pi/10} 5\cos(5x)\cdot e^{\sin(5x)}\,dx$

$= \frac{1}{5}\left[2\sin(5x)\cdot e^{\sin(5x)}\right]_0^{\pi/10} - \frac{2}{5}\left[e^{\sin(5x)}\right]_0^{\pi/10}$

$= \frac{2}{5}\cdot(e-0) - \frac{2}{5}\cdot(e-1) = \frac{2}{5}.$

(7) Ho che $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e^{-1}} = e$

e che $\frac{\log(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e $\frac{\sin(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

quindi il limite è $\pi\cdot e + e$