Prova complessiva scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile-Architettura, 2010/11

Nome...**Cognome**.. **Matricola**.................

(1) [12 pt] Studiare $f(x) = x \cdot e^{x\cdot|x-1|}$

- Trovare il dominio di f, il sottoinsieme del dominio su cui f è continua e i limiti agli estremi degli intervalli su cui f è continua.

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ $\qquad f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

- Trovare i punti in cui la funzione è derivabile e calcolarne la derivata.

$f'(x) = e^{x|x-1|} + x e^{x\cdot|x-1|} \cdot \left(|x-1| + x \cdot \mathrm{sgn}(x-1)\right) =$ $\qquad f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{1\}, \mathbb{R})$

$= e^{x|x-1|}\left(1 + x|x-1| + x^2 \cdot \mathrm{sgn}(x-1)\right)$

- Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

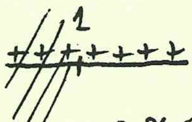
f CRESCE SU $[-\frac{1}{2}; +\infty[$

f DECRESCE SU $]-\infty, -\frac{1}{2}]$

$\mathrm{I} \begin{cases} x > 1 \\ \cancel{e^{x(x-1)}}\left(1 + x(x-1) + x^2\right) > 0 \end{cases}$

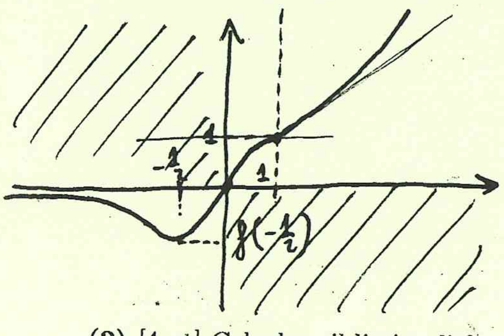
$f(1) = 1 \cdot e^{1(0)} = 1 \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = 2$

$1 + x^2 - x + x^2 > 0 \qquad 1 + 2x^2 - x > 0$

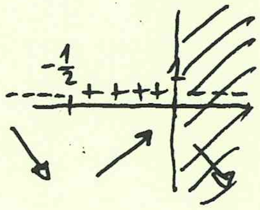


$+1 \pm \sqrt{1-8} \qquad \Delta < 0$

- Tracciare un grafico qualitativo di f.



$\mathrm{II} \begin{cases} x < 1 \\ \cancel{e^{x(1-x)}}\left(1 + x(1-x) - x^2\right) > 0 \end{cases}$



$1 + x - x^2 - x^2 > 0$

$-2x^2 + x + 1 > 0 \qquad \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{-1\pm3}{-4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\lim_{x\to1^-} f'(x) = 0$

(2) [4 pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\cos(2x) + 3x\sin(x) - e^{x^2}}{x^3\sin(x)} = \bigstar$$

$x^3 \sin x \underset{x\to0}{\sim} x^4$ QUINDI DEL NUMERATORE CI SERVE LO SVILUPPO FINO A x^4

$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

$3x\sin(x) = 3x\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + o(x^4) = 3x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$

$$\bigstar = \lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{1} - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3}x^4 + \cancel{3x^2} - \frac{x^4}{2} - \cancel{1} - \cancel{x^2} - \frac{x^4}{2}}{x^4} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

F(t) PRIM. DI e^{t^2}

$\int_1^x e^{t^2}\,dt = F(x) - F(1)$

$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x e^{t^2}\,dt\right) = F'(x)\cdot 1 = e^{x^2}$

(3) [3 pt.] Sia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$G(x) = e^{\int_1^x e^{t^2}\,dt}.$$

Calcolare $G'(x)$, $x\in\mathbb{R}$, e $G'(1)$

$G'(x) = e^{\int_1^x e^{t^2}dt}\cdot e^{x^2}$ $\qquad G'(1) = e$

(4) [4 pt] Siano $f, g:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue e supponiamo che, per ogni $x\in[0,1]$, valga che

$$f^2(x)+g^2(x)=1.$$

Quale delle seguenti affermazioni *segue necessariamente* da queste ipotesi?

- Se $f(0)<0<f(1)$, allora esiste x in $[0,1]$ tale che $|g(x)|=1$. OK (TEO ZERI)
- Esiste x in $[0,1]$ tale che $f(x)+g(x)=1$. NO $f(x)=\sqrt{0,5}$ $g(x)=\sqrt{0,5}$
- Per ogni x in $[0,1]$, si ha che $f'(x)f(x)+g'(x)g(x)=0$. NO, ESTREMI
- Se $f(0)<0<f(1)$, allora esiste x in $[0,1]$ tale che $g(x)=1$. NO $g(x)^2=1$ POTREBBE ESSERE $g(x)=-1$

$\Rightarrow \exists x\in\,]0,1[$ t.c. $f(x)=0$ QUINDI

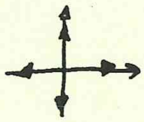
(5) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^4-1)(z^4+1)=0.$$

$z^4-1=0 \qquad z^4=1$

$z^4=e^{i2k\pi}$

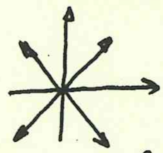
$z=e^{i\frac{2k\pi}{4}}=e^{ik\frac{\pi}{2}} \qquad K=0,1,2,3$



$z^4+1=0 \qquad z^4=-1$

$z^4=e^{i(\pi+2k\pi)}$

$z=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)} \qquad K=0,1,2,3$



(6) [4 pt] Calcolare

$e^x=t \qquad x=\ln t \qquad dx=\frac{1}{t}\,dt$

$$\int_0^1 e^{2x}\sqrt{1+e^x}\,dx. = \int_1^e t^{\cancel{2}}\sqrt{1+t}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt =$$

$$=\int_1^e t\cdot\sqrt{1+t}\,dt = \left[t\cdot\frac{(1+t)^{\frac12+1}}{\frac12+1}\right]_1^e - \int_1^e\frac{(1+t)^{\frac12+1}}{\frac12+1}\,dt =$$

$$= e\cdot(1+e)^{\frac32}\cdot\frac23 - 1\cdot 2^{\frac32}\cdot\frac23 - \frac23\int_1^e(1+t)^{\frac32}\,dt =$$

$$=\frac23\left(e\cdot(1+e)^{\frac32}-2^{\frac32}-\left[\frac25(1+t)^{\frac52}\right]_1^e\right)$$

$$=\frac23\left(e(1+e)^{\frac32}-2^{\frac32}-\frac25(1+e)^{\frac52}+\frac25 2^{\frac52}\right)$$

(7) [3 pt] Calcolare il limite di successione:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\pi\frac{\overbrace{2^{1-2n}}^{\to 0}+3n^2}{\underbrace{4^{1-n}}_{\to 0}+2n^2}+e\frac{2^{1+2n}+\overbrace{3n^2}^{o(2^{1+2n})}}{4^{1+n}+\underbrace{2n^2}_{o(4^{1+n})}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\pi\cdot\frac{3\cancel{n^2}}{2\cancel{n^2}}+e\,\frac{2^{1+2n}}{4^{1+n}}\right)=$$

$$=\frac32\pi+e\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot\cancel{2^{2n}}}{4\cdot\cancel{4^n}}=\frac32\pi+\frac12 e$$