II prova parziale scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile-Architettura, 17 febbraio 2011

Nome..**Cognome**... **Matricola**................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno (Cancellare la voce che non interessa).

(1) **[15 pti]** Sia
$$f(x) = \left|x^3 - 48x\right| + 12x, \ x \in \mathbb{R}.$$

(1.1) Trovare il dominio di f; i limiti agli estremi del dominio di f e il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ su cui f è continua.

(1.2) Trovare il sottoinsieme B di $\mathbb{R}$ su cui f è derivabile e calcolare $f'(x)$ per $x \in B$.

(1.3) Trovare le rette tangenti da destra e da sinistra al grafico di f nei punti in cui f non è derivabile.

(1.4) Trovare gli intervalli di $\mathbb{R}$ su cui f è crescente. Trovare i punti di massimo relativo e di minimo relativo per f.

(1.5) Tracciare un grafico qualitativo di f.

(2) [6 pti]Sia $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si definisca

$$G(x) = \int_1^{f(4x)} e^{t^2}\, dt + \int_{f(4x)}^{2} e^{t^2}\, dt + 4x \cdot \int_0^x f(t)dt$$

Calcolare $G'(x)$ per x in $\mathbb{R}$.

(3) [6 pti]Calcolare l'integrale

$$I = \int_{e^8}^{e^{12}} \frac{\log(t)}{t\log^2(t) - 16t} dt.$$

(4) [6 pti]Calcolare:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{1-4x}} - e(1+4x)}{x^2}.$$

AM1-Parz 1. (1) $f(x) = |x^3-48x| + 12x$

(1.1) $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(|x|^3\cdot\left(\left|1-\frac{48}{x^2}\right| + \frac{12x}{|x|^3}\right)\right) = +\infty$

(1.2) Se $x^3-48x = x\cdot(x^2-48) = x\cdot(x-4\sqrt3)(x+4\sqrt3) \neq 0 \ (x\neq 0, \pm4\sqrt3)$, allora $\exists f'(x) = \operatorname{sgn}(x^3-48x)\cdot(3x^2-48)+12 =$
$= 3\cdot[\operatorname{sgn}(x^3-48x)\cdot(x^2-16)+12]$.

Poichè per $x\to 0$ e $x\to\pm4\sqrt3$ si ha che $x^2-16 \neq 0$, derivate destra e sinistra in questi punti non coincidono, quindi Dominio$(f') = \mathbb{R}\setminus\{0, \pm4\sqrt3\}$.

(1.3) $\operatorname{sgn}(x^3-48x) > 0 \iff x^3-48x>0$
$\iff -4\sqrt3 < x < 0$ o $x > 4\sqrt3$.

$-4\sqrt3 \quad 0 \quad 4\sqrt3$
$- \quad + \quad - \quad +$

$f'_\pm(4\sqrt3) = 3\cdot(\pm32+2)$; $f'_\pm(0) = 3\cdot(\mp(-16)+12) = 3\cdot(\pm16+12)$

$f'_\pm(-4\sqrt3) = 3\cdot(\pm32+2)$: le rette tangenti (poichè $f(0)=0$, $f(\pm4\sqrt3) = \pm12\cdot4\cdot\sqrt3 = \pm48\sqrt3$)

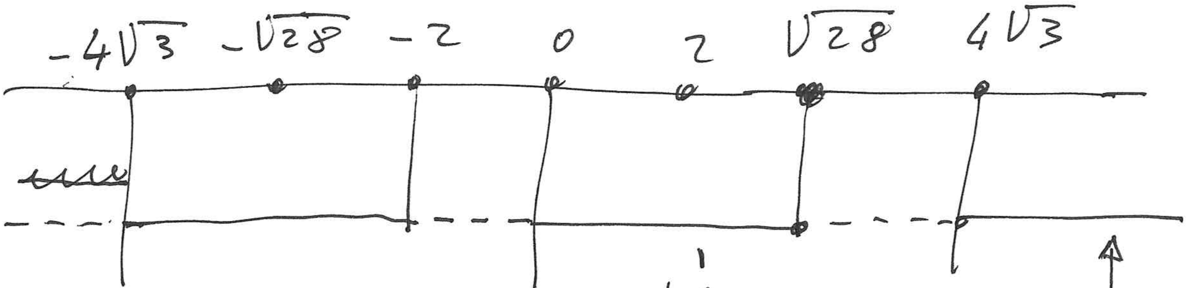
sono:

$x=(4\sqrt3)^+$: $y-48\sqrt3 = 102(x-4\sqrt3)$; $x=(4\sqrt3)^-$: $y-48\sqrt3 = -60(x-4\sqrt3)$

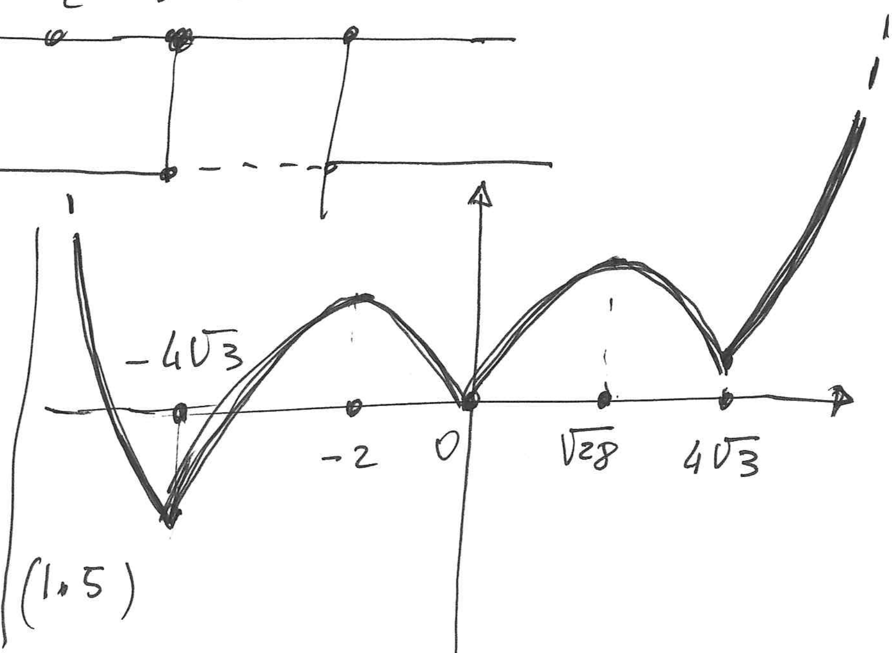
$x=(-4\sqrt3)^+$: $y+48\sqrt3 = 102(x+4\sqrt3)$; $x=(-4\sqrt3)^-$: $y+48\sqrt3 = -60(x+4\sqrt3)$

$x=(0)^+$: $y = 84x$; $x = 0^-$: $y = -12\cdot x$

(1.4) $f'(x)\geq 0 \iff \begin{cases} -4\sqrt3<x<0 \text{ o } 4\sqrt3<x \\ x^2-4\geq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x<-4\sqrt3 \text{ o } 0<x<4\sqrt3 \\ -x^2+28\geq 0 \end{cases}$



f cresce su $[-4\sqrt3, -2]$, su $[0, \sqrt{28}]$ e su $[4\sqrt3, +\infty]$
p.ti MAX.rel. $x = -2, \sqrt{28}$,
p.ti min.rel. $x = \pm4\sqrt3, 0$



(1.5)

(2) $G(x) = \int_1^2 e^{t^2}\,dt + 4x \cdot \int_0^x f(t)\,dt$ per additività degli integrali;

$\int_1^2 e^{t^2}\,dt$ è costante (non dipende da x!), quindi:

$$G'(x) = 4 \int_0^x f(t)\,dt + 4x \cdot f(x)$$ per derivata di prodotti e T.F.C.I.

(3) Pongo $\log(t) = x \Big| \begin{array}{l} \log(e^{12}) = 12 \\ \log(e^8) = 8 \end{array}$; $dx = \frac{dt}{t}$

$$\Rightarrow I = \int_8^{12} \frac{x}{x^2-16}\,dx = \frac{1}{2} \log(x^2-16) \Big|_{x=8}^{x=16} = \frac{1}{2} \log \frac{16^2-16}{8^2-16}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{16 \cdot 15}{16 \cdot 3} = \frac{1}{2} \log 5$$

(4) $e^{\frac{1}{1-4x}} - e(1+4x) = e^{1+4x+(4x)^2+o(x^2)} - e(1+4x)$

$= e \cdot e^{4x+16x^2+o(x^2)} - e \cdot (1+4x) =$

$= e \cdot \left[1 + (4x+16x^2) + \frac{(4x+16x^2)^2}{2} + o(x^2)\right] - e(1+4x)$

$= e \cdot [1 + 4x + 16x^2 + 8x^2 - 1 - 4x + o(x^2)] = e \cdot 24x^2 + o(x^2)$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{1-4x}} - e(1+4x)}{x^2} = e \cdot 24 + o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} 24 \cdot e$$

Prova scritta complessiva di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile-Architettura, 17 febbraio 2011

Nome..**Cognome**.. **Matricola**................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno (Cancellare la voce che non interessa).

(1) [**10 pti**] Sia

$$f(x) = \left|x^3 - 48x\right|, \ x \in \mathbb{R}.$$

(1.1) Trovare il dominio di f; i limiti agli estremi del dominio di f e il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ su cui f è continua.

(1.2) Trovare il sottoinsieme B di $\mathbb{R}$ su cui f è derivabile e calcolare $f'(x)$ per $x \in B$.

(1.3) Trovare gli intervalli di $\mathbb{R}$ su cui f è crescente. Trovare i punti di massimo relativo e di minimo relativo per f.

(1.4) Tracciare un grafico qualitativo di f.

(2) [**4 pti**] Sia $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si definisca

$$G(x) = \int_1^{f(4x)} e^{t^2} dt + \int_{f(4x)}^1 e^{t^2} dt + 4x \cdot \int_0^x f(t) dt$$

Calcolare $G'(x)$ per x in $\mathbb{R}$.

(3) [**4 pti**]Calcolare l'integrale

$$I = \int_{e^8}^{e^{12}} \frac{\log(t)}{\log(t) - 4} \frac{dt}{t}.$$

(4) [**4 pti**]Calcolare:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{x}{1-3x}} - 1 - x}{x^2}.$$

(5) [**4 pti**]Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^6 + 7iz^3 - 10 = 0.$$

(6) [**4 pti**]Sia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione decrescente in $\mathbb{R}$ e si supponga che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in (0,1)$. Quali delle seguenti conclusioni **non segue** necessariamente dalle ipotesi?

- Esiste $\lim_{n\to\infty} a_n \in [0,1]$.
- Esiste $\lim_{n\to\infty} a_n \in (0,1]$.
- Esiste $\lim_{n\to\infty} a_n \in [0,1)$.
- Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua in $[0,1]$, allora esiste $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

(7) [**3 pti**]Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(\pi \cdot \frac{4^{n+\log(n^2+1)}}{2^{2n}(n+1)^{\log(16)}} + e \cdot \frac{4^{n+\log(n^2+1)}}{2^{2n}(n^2+n)^{\log(4)}} \right)$$

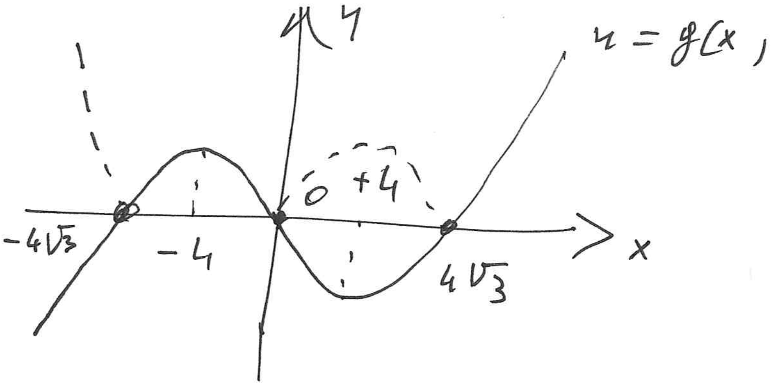
AM1-Tot. | Es. (2), (3), (4): vedi prove parziali.

(1.1) $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

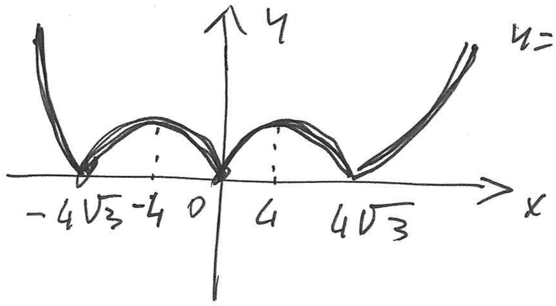
(1.1) Per studiare f posso procedere come nel (più difficile) caso affrontato nelle prove parziali, oppure studio $g(x) = x^3 - 48x = x \cdot (x - 4\sqrt{3})(x + 4\sqrt{3})$ e ne "ribalto" la parte negativa di grafico.

$g'(x) = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) \geq 0 \iff x \geq 4 \vee x \leq -4$.

$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ e $g(x) = 0 \iff x = \pm 4\sqrt{3} \vee x = 0$:



Poiché $g'(x) \neq 0$ in $x = 0, \pm 4\sqrt{3}$, ho che f non è derivabile in $x = 0, \pm 4\sqrt{3}$



(1.2) $f'(x) = \operatorname{sgn}(x^3 - 48x) \cdot 3 \cdot (x^2 - 16)$

Dominio $(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 4\sqrt{3}\}$

(1.3) f cresce su $[-4\sqrt{3}, -4]$, $[0, 4]$ e $[4\sqrt{3}, +\infty)$.

P.ti di max. rel. sono $x = \pm 4$; p.ti di min. rel. sono $x = 0$, $x = \pm 4\sqrt{3}$

(5) $z^6 + 7iz^3 - 10 = 0$

$z^6 + 7iz^3 - 10 = z^6 + 5iz^3 + 2iz^3 + 2i \cdot 5i$
$= (z^3 + 5i)(z^3 + 2i) = 0$

$\iff z^3 = -5i = 5 \cdot e^{-i\pi/2} \vee z^3 = -2i = 2 \cdot e^{-i\pi/2}$

$\iff z = \sqrt[3]{5} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$ per $k = 0, 1, 2$

$\vee z = \sqrt[3]{2} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$ per $k = 0, 1, 2$

(2

(6) Poiché $\{a_n\}$ è decrescente, $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ ed essendo $0 < a_n < 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$, ho che $\inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \in [0,1)$.

Ne segue che la prima e la terza affermazione valgono nelle nostre ipotesi.
La seconda $\boxed{\text{non vale}}$. Esempio: $a_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \notin (0,1)$, pur essendo decrescente.
La quarta vale perché $\exists\, \alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \in [0,1)$ e f è continua in α, dunque $\exists \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$.

(7) $4^{n+\log(n^2+1)} = 4^n \cdot \left(e^{\log 4}\right)^{\log(n^2+1)} = 2^{2n}\cdot (n^2+1)^{\log(4)}$

e $\log(16) = \log(4^2) = 2\cdot\log(4)$.
Usando ancora proprietà delle potenze se necessario, se $\{a_n\}$ è la successione di cui si vuole calcolare il limite,

$$a_n = \pi\cdot \frac{2^{2n}\cdot (n^2+1)^{\log(4)}}{2^{2n}\cdot [(n+1)^2]^{\log 4}} + e\cdot \frac{2^{2n}\cdot (n^2+1)^{\log(4)}}{2^{2n}\cdot (n^2+n)^{\log(4)}}$$

$$= \pi\cdot\left[\frac{n^2+1}{(n+1)^2}\right]^{\log(4)} + e\cdot\left[\frac{n^2+1}{n^2+n}\right]^{\log(4)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi + e$$

perché $\frac{n^2+1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ e $\frac{n^2+1}{n^2+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.