Prova scritta di Analisi Matematica I (9/1/2012)

Nome..**Cognome**.. **Matricola**...............

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello; **non** nel *mattino* | *pomeriggio* del giorno
(Cancellare la voce che non interessa).

(1) [8 pt] Studiare $f(x) = |x-1| \cdot e^{-\frac{|x-1|}{2(3-x)}}$.

- Trovare il dominio di f, il sottoinsieme del dominio su cui f è continua e i limiti agli estremi degli intervalli su cui f è continua.

- Trovare i punti in cui la funzione è derivabile e calcolarne la derivata.

- Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

- Trovare punti di massimo e minimo relativo.

- Tracciare un grafico qualitativo di f.

- Trovare le rette tangenti al grafico di f da destra e da sinistra in $x = 1$.

(2) [4 pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(2x) - 2xe^{4x^2}}{\log\left((1+4x^2)^{3x}\right)}$$

(3) [4 pt.] Calcolare $\int_0^2 (t-2)^3 e^{t^2-4t} dt$.

(4) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(iz^2 + 2(i-1)z - 4)(iz^3 + 8)$$

(5) [2 pt] Per quali valori di $\gamma \geq 0$ si ha la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\gamma + x^{2\gamma}}{x^{3\gamma} + x^{5\gamma}} dx$$

(6) [4 pt. se esatto, -1 pt. se errato, 0 pt. se non fatto.] Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(0) < 0 < f(1)$ e si definisca

$$F(x) = \int_x^1 f(t)dt, \; F : [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- Esiste c in $(0,1)$ tale che $F(c) = 0$.
- Esiste c in $(0,1)$ tale che $F'(c) = 0$.
- $x = 1$ è punto di minimo per F.
- $F(0) < 0$.

(7) [3 pt] Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte su $\mathbb{R}$ e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = x \cdot g(3 - 2x).$$

Calcolare $h''(x)$.

(8) [2 pt] Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+\log(n^2)} + 2^{2n+\log(n)}}{n^{\log(4)}2^{2n} + \left(n^{\log(2)}2^n\right)^2}.$$

0) $f(x) = |x-1| \cdot e^{-\frac{|x-1|}{2\cdot(3-x)}}$

Dominio$(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, f è continua in Dominio(f).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot e^{1/2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \cdot e^{-1/2} = +\infty$$

$$\boxed{\text{Uso } \frac{|x-1|}{3-x} = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{|1-1/x|}{-1+3/x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\left(\frac{1}{-1}\right) = \mp 1}$$

Per $x \to 3^+$ ho $-\frac{|x-1|}{2\cdot(3-x)} \to +\infty$, quindi $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2\cdot(+\infty) = +\infty$

Per $x \to 3^-$, ho $-\frac{|x-1|}{2\cdot(3-x)} \to -\infty$, quindi

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2\cdot e^{-\infty} = 2\cdot 0 = 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = 0 \end{array}}$$

Osservo che $\forall x \in$ Dominio$(f) \Rightarrow f(x) \geq 0$ e che $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Se $x \in$ Dominio(f) e $x \neq 1$, allora $\exists f'(x) =$

$$= \operatorname{sgn}(x-1) \cdot e^{-\frac{|x-1|}{2\cdot(3-x)}} + |x-1| \cdot e^{-\frac{|x-1|}{2\cdot(3-x)}} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(x-1)(x-3) - |x-1|}{2\cdot(x-3)^2}$$

$$= \operatorname{sgn}(x-1) \cdot e^{\frac{|x-1|}{2\cdot(x-3)}} \cdot \left[1 + (x-1)\cdot \frac{\operatorname{sgn}(x-1)\cdot(x-3) - |x-1|}{2\cdot(x-3)^2}\right]$$

$$= \boxed{\frac{\operatorname{sgn}(x-1)\cdot e^{\frac{|x-1|}{2\cdot(x-3)}}}{2\cdot(x-3)^2} \cdot \{2(x-3)^2 + (x-1)\cdot[\operatorname{sgn}(x-1)(x-3) - |x-1|]\}} = f'(x)$$

Rimando la discussione sull'esistenza di $f'(1)$.

studiamo il segno di $f'(x)$.

$A := \mathrm{sgn}(x-1) > 0 \iff x > 1$ (e $x \neq 3$ per dominio)

$$B := \frac{e^{\frac{|x-1|}{2\cdot(x-3)}}}{2\cdot(x-3)^2} > 0 \quad \forall x \in \text{Dominio}(f)$$

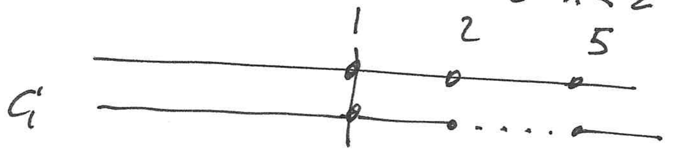
$$C := 2\cdot(x-3)^2 + (x-1)\cdot[\mathrm{sgn}(x-1)(x-3) - |x-1|] =$$

$$= \begin{cases} 2\cdot(x-3)^2 + (x-1)\cdot[(x-3)-(x-1)] = 2x^2 - 12x + 18 + (x-1)\cdot(-2) & (\text{se } x > 1) \\ 2\cdot(x-3)^2 + (x-1)\cdot[-(x-3)-(1-x)] = 2x^2 - 12x + 18 + (x-1)\cdot 2 & (\text{se } x < 1) \end{cases}$$

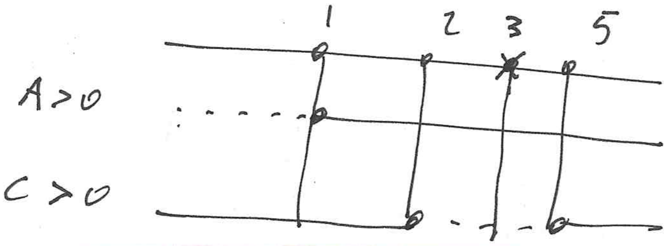
$$= \begin{cases} 2x^2 - 14x + 20 & (\text{se } x > 1) \\ 2x^2 - 10x + 16 & (\text{se } x < 1) \end{cases} = \begin{cases} 2\cdot(x^2 - 7x + 10) & (\text{se } x > 1) \\ 2\cdot(x^2 - 5x + 8) & (\text{se } x < 1) \end{cases}$$

Quindi, $C > 0 \iff \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 7x + 10 > 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 1 \\ x^2 - 5x + 8 > 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x > 1 \\ \cancel{(\text{poiché } \Delta := 7^2 - 4\cdot 10)} \\ x < 2 \text{ o } x > 5 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < 1 \\ \text{poiché} \\ \Delta := 5^2 - 4\cdot 8 < 0 \end{cases}$



Considero i fattori A e C (B non è rilevante):

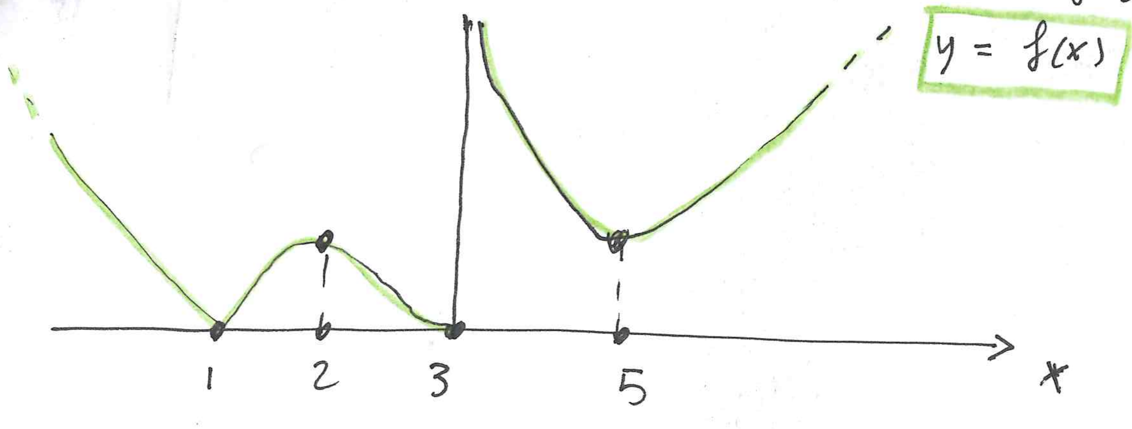


$f'(x) > 0$ su $(1, 2]$ e $[5, +\infty)$

$f'(x) < 0$ su $(-\infty, 1]$ e $[2, 3), (3, 5]$

$\boxed{f \text{ cresce su } [1, 2] \text{ e su } [5, +\infty);\ \text{decresce su } (-\infty, 1], [2, 3), (3, 5]}$

Grafico (supponendo che non esiste $f'(1)$):



Punti di min. relativo: $x=1$, $x=5$
($x=1$ è il punto di minimo)

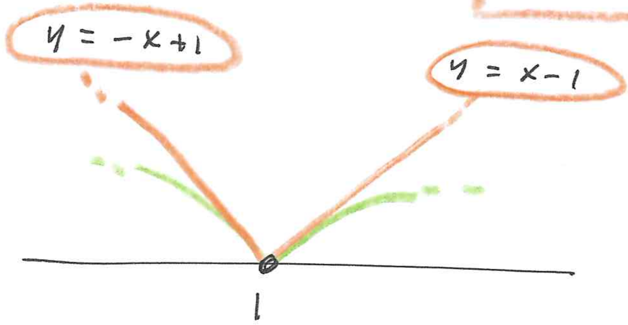
Punto di max. relativo: $x=2$ (non è punto di massimo

Calcolo $\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \pm 1 \cdot \frac{e^0}{2\cdot(-2)^2}\cdot[2\cdot(-2)^2+0] = \pm 1$;

$\boxed{\text{non esiste } f'(1):}$ Dominio$(f') = \mathbb{R}\setminus\{3,1\}$.

Poiché $f(1)=0$, la retta tangente da destra è
$$y-0=(+1)\cdot(x-1),\qquad \boxed{y=x-1},$$
mentre la retta tangente da sinistra è
$$y-0=(-1)\cdot(x-1),\qquad \boxed{y=-x+1}$$

Sul grafico:



(2) $\mathrm{Den}(x) := \log\left((1+4x^2)^{3x}\right) = 3x\cdot\log(1+4x^2) \underset{x\to0^+}{\sim} 3x\cdot 4x^2$
$= 12x^3$ per il prodotto notevole $\frac{\log(1+y)}{y}\xrightarrow[y\to0]{} 1$.

Sviluppo il numeratore al terzo ordine:

$\mathrm{Num}(x) := \tan(2x) - 2x\cdot e^{4x^2} =$

$= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} - 2x\cdot[1+4x^2+o(x^2)] =$

$= \frac{\sin(2x)}{1-(1-\cos(2x))} - [2x+8x^3+o(x^3)]$

$= \left[2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)\right]\cdot\left\{1+[1-\cos(2x)]+[1-\cos(2x)]^2+o([1-\cos(2x)]^2)\right\}$
$-[2x+8x^3+o(x^3)]$

$= \left[2x-\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3)\right]\cdot\left\{1+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^3)\right\} - [2x+8x^3+o(x^3)]$

$$= \left[2x - \frac{4}{3}x^3 + 4x^3 + o(x^3)\right] - \left[2x + 8x^3 + o(x^3)\right]$$

$$= \left(-\frac{4}{3} - 4\right)x^3 + o(x^3) = -\frac{16}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{Num(x)}{Den(x)} = \frac{-\frac{16}{3}x^3 + o(x^3)}{12x^3 + o(x^3)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{16}{3\cdot 12} = \boxed{-\frac{4}{9}}$$

(3) $\int_0^2 (t-2)^3 e^{t^2-4t}\,dt =$ sostituisco $t-2 = x$; $dx = dt$

$t = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$t = 2 \Leftrightarrow x = 0$

$t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4 = x^2 - 4$

$$= \int_{-2}^{0} x^3 \cdot e^{x^2-4}\,dx =$$

$$= e^{-4} \cdot \int_{-2}^{0} x^3 \cdot e^{x^2}\,dx = e^{-4}\left[\frac{e^{x^2}}{2}\cdot x^2\right]_{-2}^{0} - e^{-4} \cdot \int_{-2}^{0} \frac{e^{x^2}}{2}\cdot 2x\,dx$$

integro per parti: $D\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right) = x \cdot e^{x^2}$

$$= e^{-4}\left(-\frac{e^4}{2}\cdot 4\right) - \frac{e^{-4}}{2} \cdot \left[e^{x^2}\right]_{-2}^{0} = -2 - \frac{e^{-4}}{2}\left[1 - e^4\right]$$

$$= -2 - \frac{e^{-4}}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{3}{2} - \frac{e^{-4}}{2}}$$

(4) $iz^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow -z^3 + 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 = 8i = 8e^{i\pi/2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right],\ k = 0,1,2}$$

$iz^2 + 2(i-1)z - 4 = 0 \Leftrightarrow -z^2 + 2i(i-1)z - 4i = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -z^2 - 2(1+i)z - 4i$

$\Leftrightarrow z^2 + 2(i+1)z + 4i = 0$ cerco z_1, z_2 t.c.

$z_1 + z_2 = 2i + 2$

$z_1 \cdot z_2 = 4i$

$$\boxed{z_1 = 2,\ z_2 = 2i}$$

(5) Per $x \to 0^+$, $f(x) := \dfrac{x^{\delta} + x^{2\delta}}{x^{3\delta} + x^{5\delta}} \sim \dfrac{x^{\delta}}{x^{3\delta}} = \dfrac{1}{x^{2\delta}}$:

Si ha convergenza $\Leftrightarrow$ $2\delta < 1$: $\delta < 1/2$

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \dfrac{x^{2\delta}}{x^{5\delta}} = \dfrac{1}{x^{3\delta}}$;

Si ha convergenza $\Leftrightarrow$ $3\delta > 1$: $\delta > 1/3$.

L'integrale converge $\Leftrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{3} < \delta < \frac{1}{2}}$

(6) $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow \exists\, F'(x) = -f(x)$ per T.F.C.I.

Ora, $F'(0) = -f(0) > 0$ e $F'(1) = -f(1) < 0$,

quindi esiste $c \in (0,1)$ t.c. $F'(c) = -f(c) = 0$,

per il Teorema degli zeri: vale la seconda risposta.

Per ciascuna delle altre esistono controesempi (vedi alla fine).

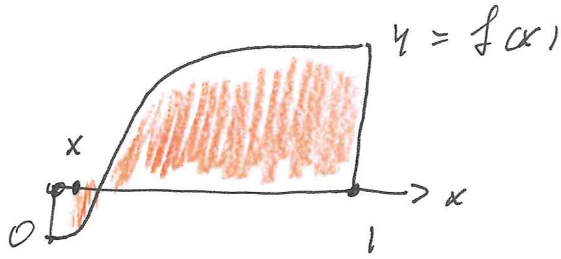
(7) $h(x) = x \cdot g(3-2x) \Rightarrow h'(x) = g(3-2x) - 2x \cdot g'(3-2x)$

$\Rightarrow h''(x) = g'(3-2x)\cdot(-2) - 2\cdot g'(3-2x) - 2x \cdot g''(3-2x)\cdot(-2)$

$= \boxed{-4\cdot g'(3-2x) + 4x \cdot g''(3-2x) = h''(x)}$

(8) $$\frac{2^{2n+\log(n^2)} + 2^{2n+\log(n)}}{n^{\log(4)}\cdot 2^{2n} + \left(n^{\log(2)}\cdot 2^{n}\right)^2} = \frac{2^{2n}\cdot 2^{2\log(n)} + 2^{2n}\cdot 2^{\log(n)}}{e^{\log(n)\cdot\log(4)}\cdot 2^{2n} + e^{2\log(n)\cdot\log(2)}\cdot 2^{2n}}$$

$$= \frac{2^{2\log(n)} + 2^{\log(n)}}{4^{\log(n)} + 2^{2\log(n)}} = \frac{\cancel{2^{2\log(n)}}}{\cancel{2^{2\log(n)}}}\cdot\frac{1 + 2^{-\log(n)}}{1+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1+0}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$



Per questa funzione, $F(x) > 0 \ \forall x \in [0,1)$: la prima risposta non è necessariamente vera

Avendosi $F(1) = 0$, ma $F(x) > 0$ per qualche $x \in [0,1)$, la terza affermazione è sempre falsa.

Per f come nel grafico qui sopra, ho che $F(0) = \int_0^1 f(t)\,dt > 0$: la quarta affermazione non è necessaria.

Esercizio facoltativo.

Sia $F(x) = \int_0^x (t-2)^3 \cdot e^{t^2-4t}\,dt$.

Per T.F.C.I. ho che $\exists F'(0) = (0-2)^3 \cdot e^{0^2-4\cdot 0} = -8$:

$$\boxed{F'(0) = -8}$$

Gli stessi conti dell'esercizio (3) danno:

$$F(x) = \int_{-2}^{x-2} y^3 \cdot e^{y^2-4}\,dy = e^{-4} \cdot \left[\frac{e^{y^2}}{2} \cdot y^2\right]_{-2}^{x-2} - e^{-4} \cdot \int_{-2}^{x-2} \frac{e^{y^2}}{2} \cdot 2y\,dy$$

$$= e^{-4} \cdot \left[\frac{e^{(x-2)^2}}{2}(x-2)^2 - \frac{e^4}{2} \cdot 4\right] - \frac{e^{-4}}{2} \cdot \left[e^{y^2}\right]_{-2}^{x-2}$$

$$\boxed{= e^{-4} \cdot \left[\frac{e^{(x-2)^2}}{2}(x-2)^2 - \frac{e^4}{2} \cdot 4\right] - \frac{e^{-4}}{2} \cdot \left[e^{(x-2)^2} - e^4\right] = F(x)}$$

(Si può semplificare qualcosa).