Prova scritta di Analisi Matematica I (23/1/2012)

Nome...**Cognome**... **Matricola**.................

Prova orale verso: *l'inizio* | *la fine* dell'appello. (Cancellare la voce che non interessa).

(1) [8 pt] Studiare $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_0^x (t+1)te^{-t^3}\,dt.$$

- Trovare se esistono $M_+ := \lim_{x\to+\infty} h(x) \in [-\infty, +\infty]$ e $M_- := \lim_{x\to-\infty} h(x) \in [-\infty, +\infty]$; quindi dire se $M_+ \in \mathbb{R}$ e se $M_- \in \mathbb{R}$. (*Non* è richiesto il valore preciso di $M_\pm$ nel caso in cui $M_\pm \in \mathbb{R}$).

  La funzione h è continua su $\mathbb{R}$?

- Trovare i punti in cui la funzione h è derivabile e calcolarne la derivata.

- Trovare gli intervalli su cui h è, rispettivamente, crescente o decrescente.

- Trovare punti di massimo e minimo relativo.

- Tracciare un grafico qualitativo di h, tenendo conto che $h(0) = \ldots$

Prova Parziali:
esercizi 1–5 + Facoltativo

(2) [4 pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{(1-3x)^2} - 2e^{9x} - 1}{2x - \sin(2x)}$$

(3) [4 pt.] Calcolare $\int_{-2}^{0} \log\left(9 + (2+x)^2\right) dt$.

(4) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^2 - 2(1+i)z + 4i)(z^2 + 2z + 4) = 0$$

(5) [2 pt] Per quali valori di $\gamma \geq 0$ si ha la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^3} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{2\gamma} dx$$

(6) [4 pt. se esatto, -1 pt. se errato, 0 pt. se non fatto.] Siano $f, g : [0,2] \to \mathbb{R}$ continue e si supponga che

$$\int_0^2 f(t)dt = 3, \quad \int_0^2 g(t)dt = 5.$$

Quale delle seguenti affermazioni *non* segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- Esiste c in $(0,2)$ tale che $f(c) = 3/2$.
- Esiste c in $(0,2)$ tale che $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{3}{5}$.
- Per ogni x in $(0,2)$, $f(x) \leq g(x)$.
- Esiste c in $(0,2)$ tale che $f(c) < g(c)$.

(7) [3 pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_1^{x^3} f(t)dt.$$

Calcolare $h''(x)$.

(8) [2 pt] Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(3n+1)^n}{3^n n^n} + \frac{(2n-1)^n}{2^n n^n} \right]$$

(6) [4 pt. se esatto, -1 pt. se errato, 0 pt. se non fatto.] Siano $f, g : [0,2] \to \mathbb{R}$ continue e si supponga che

$$\int_0^2 f(t)dt = 3, \quad \int_0^2 g(t)dt = 5.$$

Quale delle seguenti affermazioni *non* segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- Esiste c in $(0,2)$ tale che $f(c) = 3/2$.
- Esiste c in $(0,2)$ tale che $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{3}{5}$.
- Per ogni x in $(0,2)$, $f(x) \leq g(x)$.
- Esiste c in $(0,2)$ tale che $f(c) < g(c)$.

(7) [3 pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_1^{x^3} f(t)dt.$$

Calcolare $h''(x)$.

(8) [2 pt] Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(3n+1)^n}{3^n n^n} + \frac{(2n-1)^n}{2^n n^n} \right]$$

(2) [6 pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{(1-3x)^2} - 2e^{9x} - 1}{2x - \sin(2x)}$$

(3) [6 pt.] Calcolare $\int_{-2}^{0} \log\left(9 + (2+x)^2\right) dt$.

(4) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z^2 - 2(1+i)z + 4i)(z^2 + 2z + 4) = 0$$

(5) [4 pt] Per quali valori di $\gamma \geq 0$ si ha la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^3} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{2\gamma} dx$$

Facoltativo. Per quale valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che esiste

$$L := \lim_{x\to\infty} x^\alpha \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) \in \mathbb{R}?$$

Calcolare L per quel valore di α.

AMI - 23/1/2012

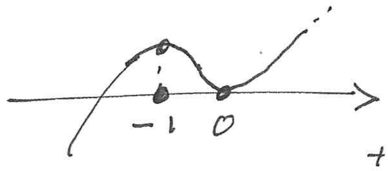
(1) $h(x) = \int_0^x (t+1)\, t\, e^{-t^3}\, dt$, $h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ per il T.F.C.I.

La prima domanda è la più difficile: la lascio per ultima.

- $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists\, h'(x) = (x+1) . x . e^{-x^3}}$ per T.F.C.I.

$h'(x) \geq 0 \iff (x+1)x \geq 0 \iff x \leq -1$ o $x \geq 0$:

- $\boxed{h \text{ cresce in } (-\infty,-1] \text{ e in } [0,+\infty), \text{ decresce in } [-1,0].}$
- $\boxed{x=-1 \text{ è un punto di max. rel. e } x=0 \text{ è un punto di min. rel}}$
- Tenuto conto del fatto che $h(0)=0$, un grafico approssimativo (senza limiti e $\pm\infty$) di h è:



- Per sapere se $\exists \lim_{x \to +\infty} h(x) = \int_0^{+\infty} (t+1)\, t \cdot e^{-t^3}\, dt = M_+$

devo vedere se $k(x) = (x+1) \cdot x \cdot e^{-x^3}$ è integrabile in senso generalizzato su $[0,+\infty)$.

Ho che $$\frac{|k(x)|}{1/x^2} = x^3 (x+1) \cdot e^{-x^3} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

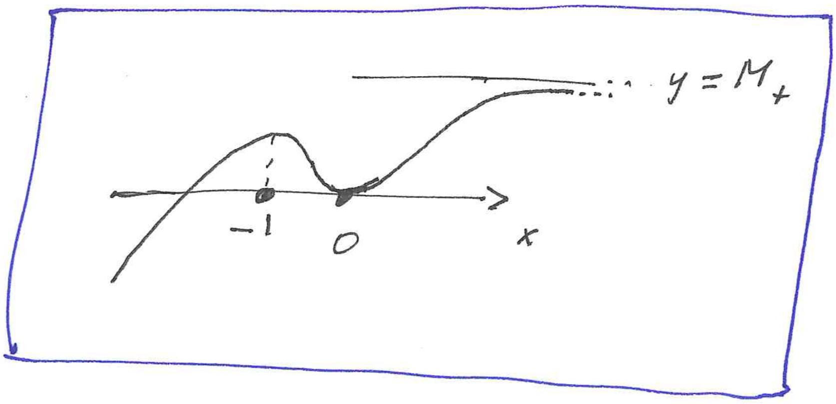
per confronto potenze/esponenziali nei limiti, quindi $|k(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge,

dunque $\int_0^{+\infty} k(x)\, dx$ converge: $\boxed{M_+ \in \mathbb{R}}$

D'altra parte, $\lim_{x \to -\infty} (x+1)\, x\, e^{-x^3} = +\infty$,

quindi $\int_0^{-\infty} (t+1)\, t\, e^{-t^3}\, dt = -M_- = +\infty$: $\boxed{M_- = -\infty}$

∘ Tenuto conto di queste ultime informazioni, il grafico ha l'aspetto:



(2) $Num(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} 3-2-1=0$ e $Den(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$: forma di indeterminazione 0/0

$$Den(x) = 2x - \left((2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3)_{x\to 0+}\right)$$

$$= \frac{(2x)^3}{3!}\left(1+o(1)_{x\to 0+}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2^2}{3}x^3$$: sviluppo Num(x) all'ordine 3 in $x=0$.

$$\frac{3}{(1-3x)^2} - 2\cdot e^{9x} - 1 = \frac{3}{1-(6x-9x^2)} - 2\left(1+9x+\frac{(9x)^2}{2}+\frac{(9x)^3}{3!}+o(x^3)\right)-1$$

$$= 3\cdot\left[1+(6x-9x^2)+(6x-9x^2)^2+(6x-9x^2)^3+o(x^3)\right]$$

$$-2-2\cdot 9x - 9^2x^2 - 3\cdot 9^2x^3 + o(x^3) - 1$$

$$=\left[3+3\cdot 6x + 3\cdot x^2\cdot(-9+6^2) + 3\cdot x^3\cdot(-2\cdot 6\cdot 9+6^3) + o(x^3)\right]$$

$$-3-2\cdot 9x - 9^2x^2 - 3\cdot 9^2 x^3 + o(x^3) =$$

$$= 3x^3\left(6^2(+3) - 9^2\right) + o(x^3) = 81x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{Num(x)}{Den(x)} \underset{x\to 0+}{\sim} \frac{81x^3+o(x^3)}{\frac{2^2}{3}x^3} \xrightarrow[x\to 0+]{} \boxed{\frac{243}{4}}$$

(3)
$$\int_{-2}^{0} \log[9+(2+x)^2]\, dx \overset{\text{I.o.P.}}{=}$$
$$= \left\{(2+x)\log[9+(2+x)^2]\right\}_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} \frac{2+x}{9+(2+x)^2}\cdot 2(2+x)\,dx$$
$$= 2\log 13 - 2\cdot\int_{-2}^{0}\left(\frac{(2+x)^2+9}{9+(2+x)^2} - \frac{9}{9+(2+x)^2}\right)dx$$
$$= 2\log 13 - 2\cdot 2 + 2\cdot\int_{-2}^{0}\frac{dx}{1+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}$$
$$= 2\log 13 - 4 + 2\cdot\left[3\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right)\right]_{-2}^{0}$$
$$= \boxed{2\log 13 - 4 + 6\cdot\mathrm{arctg}(2/3)}$$

(4) $z^2+2z+4=0$ $\qquad \frac{\Delta}{4} = 1-4=-3=3i^2$

$$\boxed{z=-1\pm i\sqrt{3}}$$

$z^2-(2+2i)z+4i=0$: cerco z_1, z_2 t.c. $z_1+z_2=2+2i$
$z_1\cdot z_2=4i$

Ho che $\boxed{z_1=2,\ z_2=2i}$

(5) $k(t) = \dfrac{e^{-t^3}(t+1)^{2\gamma}}{t^{2\gamma}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{2\gamma}}$ e $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{2\gamma}}$ conv.

sse $2\gamma<1$

sse $0\le\gamma<1/2$

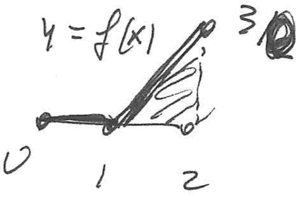
D'altra parte,
$$\frac{k(t)}{1/t^2} = \frac{e^{-t^3}t^2\cdot(t+1)^{2\gamma}}{t^{2\gamma}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ e } \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2} \text{ converge,}$$

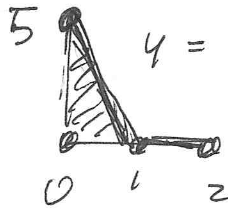
quindi $\int_1^{+\infty} k(t)\,dt$ converge per confronto.

$$\boxed{\text{Convergenza} \iff 0\le\gamma<1/2}$$

(6) È chiaro che la 3^a affermazione non segue dalle ipotesi: potrei avere che $\int_0^2 [g(t)-f(t)]\,dt = 5-3=2$, ma $g(t)-f(t)<0 \ \exists t\in(0,2)$.

P. es.





Si noti che $f(x)>g(x)$ su $(1,2]$ e $f(x)<g(x)$ su $[0,1)$

La 1^a affermazione (corretta rispetto al testo originale) è vera per il Teorema della Media Integrale:

$$\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{3}{2} \overset{\text{Teo.}}{=} f(c) \quad \exists c\in(0,2)$$

[L'affermazione originale non seguiva dalle ipotesi ed è quindi accettata: scusate il refuso].

La 2^a affermazione segue applicando il Teorema di Cauchy a $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ e $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$; $G,F\in C^1([0,2],\mathbb{R}) \Rightarrow \exists c\in(0,2)$:

$$\frac{f(c)}{g(c)} \overset{\text{TFCI}}{=} \frac{F'(c)}{G'(c)} \overset{\text{T. Cauchy}}{=} \frac{\cancel{(2-0)}\,(F(2)-F(0))}{\cancel{2}\,\big(G(2)-G(0)\big)} = \frac{\int_0^2 f(t)\,dt}{\int_0^2 g(t)\,dt} = \frac{3}{5}$$

La 4^a affermazione segue dalle ipotesi.
Se non valesse, $\forall x\in(0,2) \Rightarrow f(x)\geq g(x)$, quindi (essendo f, g continue) $\forall x\in[0,2] \Rightarrow f(x)\geq g(x)$

$$\Rightarrow 3 = \int_0^2 f(x)\,dx \geq \int_0^2 g(x)\,dx = 5, \text{ assurdo}$$

T. confronto per integrali.

(7) $h(x) = \int_1^{x^3} f(t)\,dt$ è la composizione

$$x \longmapsto y = x^3 \longmapsto \int_1^{y} f(t)\,dt$$

Applicando T.F.C.I. e derivata di composizione:

$h'(x) = 3 f(x^3)\, x^2$; quindi

$$\boxed{h''(x) = 9 f'(x^3)\, x^4 + 6 f(x^3)\, x}$$

(8) $$\frac{(3n+1)^n}{3^n \cdot n^n} = \frac{\left[3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)\right]^n}{3^n \cdot n^n} = \frac{\cancel{3^n \cdot n^n}}{\cancel{3^n \cdot n^n}} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{1/3}$$

e $$\frac{(2n-1)^n}{2^n \cdot n^n} = \ldots = \left[\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-2n}\right]^{-1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1/2}.$$

Il limite è $\boxed{e^{1/3} + e^{-1/2}}$

Facoltativo. E' un limite del tipo $0 \cdot 0$ se $\alpha < 0$; $1 \cdot 0$ se $\alpha = 0$ e $\infty \cdot 0$ se $\alpha > 0$.

Mi concentro su $\alpha > 0$, e uso (finalmente!) de l'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)}{x^{-\alpha}} \overset{\text{Hôp.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{1+x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi $$\boxed{L = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}}$$

In particolare, $\lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)\right) = 1$