Prova scritta di Analisi Matematica I (13/2/2012)

Nome..Cognome... Matricola.................

Prove orali: entro la fine della settimana.

(1) [8 pt] Studiare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left| x^2 - \frac{4}{9} \right| \cdot e^{|x+1/2|+|x-1/6|}.$$

- Determinare il dominio di f, gli intervalli su cui f è continua e i limiti di f agli estremi di questi intervalli.

- Trovare i punti in cui la funzione f è derivabile e calcolarne la derivata.

- Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

- Trovare punti di massimo e minimo relativo.

- Tracciare un grafico qualitativo di f.

(2) [4 pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+5x^2} - e^x - 5\sin^2(x)}{x\sin^2(5x)}.$$

(3) [4 pt.] Calcolare

$$\int_{-3/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \frac{\frac{16}{3}x^4 + \frac{5}{3}x}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

(4) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^6 + 3z^3 + 2 = 0$$

(5) [2 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n^{3\gamma}}\right) e^{\frac{1}{n^{3\gamma}}} - 1 \right)$$

(6) [4 pt. se esatto, -1 pt. se errato, 0 pt. se non fatto.] Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue e strettamente positive, $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in [0,1]$.

Da *una* delle seguenti ipotesi *non* segue *necessariamente* che

$$\exists x \in [0,1] : \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{3}.$$

Quale?

- $\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} dt = \frac{2}{3}$.
- $f(1) - f(0) = 2$ e $g(1) - g(0) = 3$.
- $\frac{\int_0^1 f(t)dt}{\int_0^1 g(t)dt} = \frac{2}{3}$.
- $\int_0^1 f(t)dt = 2$ e $\int_0^1 g(t)dt = 3$.

(7) [3 pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = e^{-f(x)} \int_0^x \arctan(t^2 + 1) e^{f(t)} dt.$$

Calcolare la (molto più semplice) espressione

$$h'(x) + f'(x)h(x).$$

(8) [2 pt] Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n \to \infty} e^n \left[\log\left(e^n + 1\right) - n^2 \right].$$

II prova parziale di Analisi Matematica I (13/2/2012)

Nome..Cognome... Matricola.................

Prove orali: entro la fine della settimana.

(1) [8 pt] Studiare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left|x^2 - \frac{4}{9}\right| \cdot e^{|x+1/2|+|x-1/6|}.$$

- Determinare il dominio di f, gli intervalli su cui f è continua e i limiti di f agli estremi di questi intervalli.

- Trovare i punti in cui la funzione f è derivabile e calcolarne la derivata.

- Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

- Trovare punti di massimo e minimo relativo.

- Tracciare un grafico qualitativo di f.

(2) [4 pt] Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+5x^2} - e^x - 5\sin^2(x)}{x\sin^2(5x)}.$$

(3) [4 pt.] Calcolare

$$\int_{-3/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \frac{\frac{16}{3}x^4 + \frac{5}{3}x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

(4) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^6 + 3z^3 + 2 = 0$$

(5) [2 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n^{3\gamma}}\right) e^{\frac{1}{n^{3\gamma}}} - 1 \right)$$

Facoltativo. Sia $a > 0$ fissato in $\mathbb{R}$. Calcolare $h'(x)$, dove

$$h(x) = \arctan(x) + \arctan(a) - \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right), \quad x < 1/a.$$

Ne segue una formula per la funzione arcotangente...

AM I – 13/12/2012

(1) $f(x) = |x^2 - 4/9| \cdot e^{|x+1/2| + |x-1/6|}$; $\boxed{\text{Dominio}(f) = \mathbb{R},\ f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \cdot e^{+\infty+\infty} = +\infty}$$

Noto che $f(x) \geq 0\ \forall x$ e $f(x) = 0 \iff x^2 - 4/9 = 0 \iff x = \pm 2/3$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2/3, -1/2, 1/6\}\ \exists f'(x) =$

$$= e^{|x+1/2| + |x-1/6|} \cdot \left\{ \operatorname{sgn}(x^2 - 4/9) \cdot 2x + |x^2 - 4/9| \cdot [\operatorname{sgn}(x+1/2) + \operatorname{sgn}(x-1/6)] \right\}$$

$$= e^{|x+1/2| + |x-1/6|} \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 4/9) \cdot \left\{ 2x + (x^2 - 4/9) \cdot [\operatorname{sgn}(x+1/2) + \operatorname{sgn}(x-1/6)] \right\}$$

uso $|y| = \operatorname{sgn}(y) \cdot y$ e raccolgo $\operatorname{sgn}(x^2 - 4/9)$.

$= F_1 \cdot F_2 \cdot F_3$ $\quad F_1(x) > 0\ \forall x$ $\quad F_2(x) \geq 0 \iff x^2 - 4/9 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\tfrac{2}{3}] \cup [2/3, +\infty)$

$F_3(x) = 2x + (x^2 - 4/9) \cdot [\operatorname{sgn}(x+1/2) + \operatorname{sgn}(x-1/6)] =$

$$= \begin{cases} 2[x + (x^2 - 4/9)] & \text{se } \operatorname{sgn}(x+1/2) > 0 \text{ e } \operatorname{sgn}(x-1/6) > 0 \text{ sse } x > 1/6 \\ 2[x - (x^2 - 4/9)] & \text{se } \operatorname{sgn}(x+1/2) < 0 \text{ e } \operatorname{sgn}(x-1/6) < 0 \text{ sse } x < -1/2 \\ 2x & \text{se } \operatorname{sgn}(x-1/6) < 0 < \operatorname{sgn}(x+1/2) \text{ sse } -1/2 < x < 1/6 \end{cases}$$

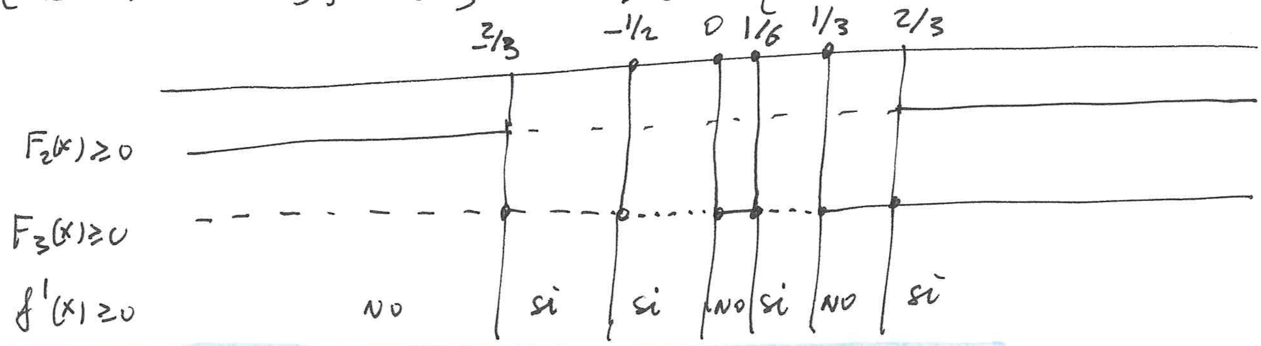
quindi

$$F_3(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x > 1/6 \\ x^2 + x - 4/9 \geq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -1/2 \\ x^2 - x - 4/9 \leq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} -1/2 < x < 1/6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Avendosi $x^2 + x - 4/9 = 0 \iff \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4/9}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{6} = -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}$

e $x^2 - x - 4/9 = 0 \iff x = 4/3, -1/3$, $\quad F_3(x) \geq 0 \iff$

$$\begin{cases} x > 1/6 \\ x \leq -4/3 \text{ o } x \geq 1/3 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -1/2 \\ -\frac{1}{3} \leq x \leq 4/3 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} -1/2 < x < 1/6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



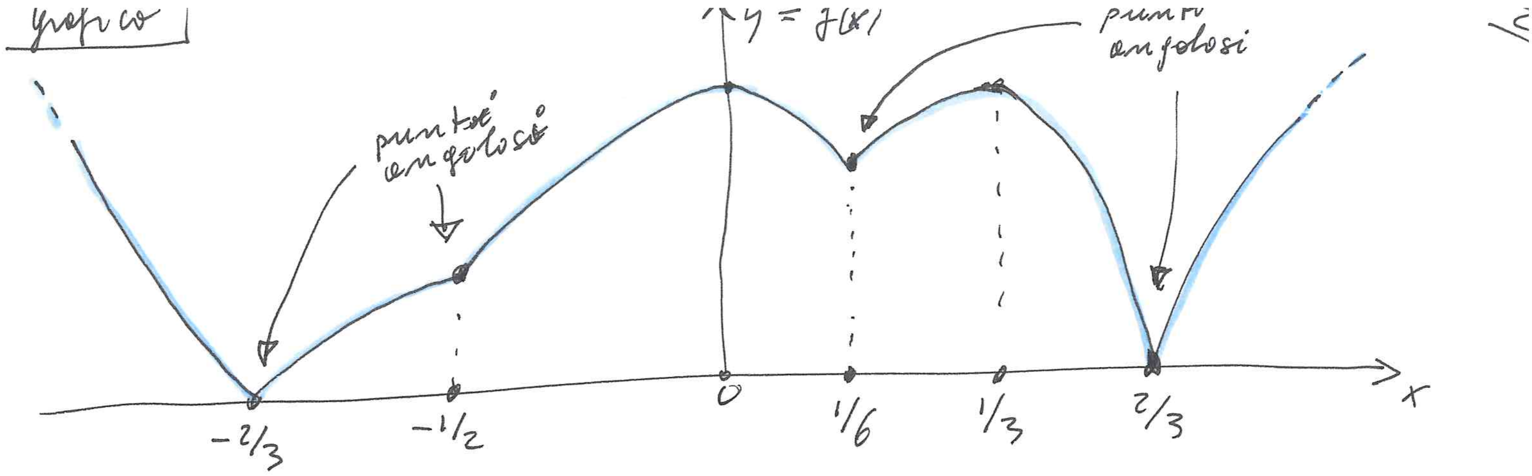
f cresce in $[-2/3, 0]$, $[1/6, 1/3]$ e $[2/3, +\infty)$

f decresce in $(-\infty, -2/3]$, $[0, 1/6]$ e $[1/3, 2/3]$

p.ti di MAX. relativo: $x = 0$, $x = 1/3$; p.ti min. rel.: $x = -2/3, 1/6, 2/3$.

Calcolando i limiti di f' per $x \to \pm(2/3)^{\pm}, (-1/2)^{\pm}, (1/6)^{\pm}$, verifico che $\boxed{\text{Dominio}(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2/3, -1/2, 1/6\}}$

grafico



(2) $\mathrm{Den}(x) = x \cdot \sin^2(5x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x\cdot(5x)^2 = 25\cdot x^3$: sviluppo $\mathrm{Num}(x)$ secondo Taylor all'ordine III.

$$\mathrm{Num}(x) = e^{x+5x^2} - e^x - 5\cdot \sin^2(x) =$$
$$= \left[1 + (x+5x^2) + \frac{(x+5x^2)^2}{2} + \frac{(x+5x^2)^3}{6} + o(x^3)\right] - \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]$$
$$- 5\left[\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2\right] =$$
$$= \left[1 + (x+5x^2) + \frac{(x^2 + 2\cdot x\cdot 5x^2 + o(x^3))}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3)\right]$$
$$- \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] - 5\left[x^2 + o(x^3)\right] =$$
$$= (1-1) + x\cdot(1-1) + x^2\cdot\left(5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 5\right) + x^3\left(5\cdot\frac{2}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + o(x^3)$$
$$= 5x^3 + o(x^3) \Rightarrow \frac{\mathrm{Num}(x)}{\mathrm{Den}(x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{5x^3 + o(x^3)}{25x^3} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{\frac{1}{5}}$$

(3) Essendo la funzione $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ dispari, $\displaystyle\int_{-3/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = 0$.

Calcolo $\displaystyle\frac{16}{3}\cdot\int_{-3/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \frac{x^4}{\sqrt{3^2-x^2}}\,dx =$

Pongo $x = 3\sin t$; $|t| \le \pi$
e $\sin(t) = \frac{x}{3} \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,
cioè $-\pi/4 \le t \le \pi/4$
$dx = \cos t \cdot dt$

$$= \frac{16}{3}\cdot\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{3^4\cdot \sin^4 t\cdot\cos t\cdot dt}{3\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$= 16\cdot 3^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^4 t\cdot dt =$$

$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$
$= 1 - 2\sin^2 t$
$\Rightarrow \sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

$$= 16\cdot 3^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 dt = 4\cdot 3^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[1 - 2\cdot\cos(2t) + \cos^2(2t)\right] dt$$

$$= 4\cdot 3^2 \left\{\frac{\pi}{2} - 2\cdot\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(4t)+1}{2}\,dt\right\}$$

$\cos(2v) = 2\cos^2(v) - 1 \Rightarrow \cos^2(v) = (1+\cos(2v))/2$

$$= 4\cdot 3^2\cdot\left\{\frac{\pi}{2}-2+\frac{\pi}{4}+\left[\frac{\sin(4t)}{8}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}\right\} = 4\cdot 3^2\cdot\left(\frac{3}{4}\pi-2\right)$$

$$= \boxed{3^3\cdot\pi - 8\cdot 3^2}$$

Si può anche fare un po' per parti:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^4 t\, dt = \left[-\cos t\cdot\sin^3 t\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4}(-\cos t)\cdot 3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t\, dt$$

$$= -2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{3}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^2(2t)\, dt = -\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2(u)\, du$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\cdot\pi \qquad \left(\text{sapendo che } \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2(u)\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(u)\,du = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Integrale} = 16\cdot 3^2\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\pi\right) = 3^3\cdot\pi - 8\cdot 3^2.$$

(5) Per $n\to\infty$, utilizzando Taylor:

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n^{3\gamma}}\right)\cdot e^{\frac{1}{n^{3\gamma}}} - 1 = \left[1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n^{3\gamma}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{n^{3\gamma}}\right)^2\right)\right]\cdot\left[1+\frac{1}{n^{3\gamma}}+o\left(\frac{1}{n^{3\gamma}}\right)\right]-1$$

$$= 1+\frac{1}{n^{3\gamma}}+o\left(\frac{1}{n^{3\gamma}}\right)-1 = \frac{1}{n^{3\gamma}}+o\left(\frac{1}{n^{3\gamma}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3\gamma}} = b_n.$$

Poiché $\sum b_n$ converge $\Leftrightarrow 3\gamma>1$, per confronto ho che $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow 3\gamma>1 \Leftrightarrow \boxed{\gamma>1/3}$

(6) Posto $w=z^3$: $\quad w^2+3w+2=0 \Leftrightarrow w=-1$ o $w=-2$

$$z^3=-1=e^{i\cdot\pi} \Leftrightarrow \boxed{z=\cos\left(\frac{2\pi}{3}k+\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}k+\frac{\pi}{3}\right) \text{ con } k=0,1,2}$$

e
$$z^3=-2=(2^{1/3})^3\cdot e^{i\pi} \Leftrightarrow \boxed{z=2^{1/3}\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}k+\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}k+\frac{\pi}{3}\right)\right] \text{ con } k=0,1,2}$$

(7)
$$h'(x)+f'(x)\cdot h(x) = \left[-e^{-f(x)}\cdot f'(x)\cdot\int_0^x \arctan(t^2+1)\,e^{f(t)}\,dt + e^{-f(x)}\cdot\operatorname{arctg}(x^2+1)\cdot e^{f(x)}\right] + f'(x)\cdot\left(e^{-f(x)}\cdot\int_0^x\arctan(t^2+1)\,e^{f(t)}\,dt\right)$$

$$= \boxed{\operatorname{arctg}(x^2+1)}$$

(8)
$$e^n\cdot\left[\log(e^n+1)-n^2\right] = e^n\cdot\left\{\log\left[e^n\cdot(1+e^{-n})\right]-n^2\right\}$$

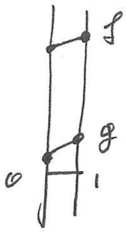
$$= e^n\cdot\left(n+\log(1+e^{-n})-n^2\right) = e^n\cdot\left(n-n^2+e^{-n}+o(e^{-n})\right)$$

uso $\log(1+x)=x+o(x)$ per $x\to 0$

$$\boxed{\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty}$$ poiché $e^n\to+\infty$ e $n-n^2+e^{-n}+o(e^{-n})\to-\infty$

(6) Simile all'esercizio del II appello 2012.

La seconda risposta è falsa (dalla seconda ipotesi, cioè, non segue la tesi):



← è chiaro che $\frac{f(x)}{g(x)} > 1 \quad \forall x \in [0,1]$.

Esplicitamente, potrei porre

$f(x) = 100 + 2x$: $f(1) - f(0) = 102 - 100 = 2$

$g(x) = 1 + 3x$: $g(1) - g(0) = 4 - 1 = 3$

$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 25 \quad \forall x \in [0,1]$.

Dalla I ipotesi segue la tesi.

Sia $A(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{g(t)}\,dt$; $A'(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e per T. Lagrange

$\exists x \in (0,1)$: $A'(x) = \frac{A(1) - A(0)}{1 - 0} = \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}\,dt = \frac{2}{3}$ per Hp.

Dalla III ipotesi segue la tesi.

Siano $B(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ e $C(x) = \int_0^x g(t)\,dt$: $B'(x) = f(x)$ e $C'(x) = g(x)$.

Per T. Cauchy, $\exists x \in (0,1)$: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B'(x)}{C'(x)} \overset{T.}{=} \frac{B(1) - B(0)}{C(1) - C(0)} = \frac{B(1)}{C(1)} = \frac{2}{3}$

Dalla IV ipotesi segue la tesi, poiché IV ipotesi $\Rightarrow$ III ipotesi.

Esercizio Facoltativo della prova parziale.

h è definita su $(-\infty, 1/a)$ e

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{1\cdot(1-ax) - (x+a)\cdot(-a)}{(1-ax)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1-ax)^2}{(1-ax)^2 + (x+a)^2} \cdot \frac{1 - ax + ax + a^2}{(1-ax)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+a^2}{1 - \cancel{2ax} + a^2x^2 + x^2 + \cancel{2ax} + a^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)} = 0 : \quad \boxed{h'(x) = 0 \ \forall x \in (-\infty, 1/a),}$$

quindi h è costante su $(-\infty, 1/a)$: $h(x) = h(0) = 0$.

Quindi, $\forall a > 0 \ \forall x < 1/a$ ho che

$$\boxed{\arctan(x) + \arctan(a) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)}$$