# I prova parziale scritta di Analisi Matematica I
## Ingegneria Edile-Architettura, 2011/12

**Nome**..........................................**Cognome**.............................................. **Matricola**................

**Punteggio per l'ammissione alla seconda prova parziale:** 15 punti.

[**7 pt**] Calcolare

$$\lim_{x\to 3^-}(x^2-9)\left(e^{\frac{1}{x-3}}+\frac{5}{x-3}\right) \text{ e } \lim_{x\to 3^+}(x^2-9)\left(e^{\frac{1}{x-3}}+\frac{5}{x-3}\right).$$

Giustificare brevemente i passaggi.

[**7 pt**] Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{(e^n-1)\cdot(e^{1/n}-1)}+3n\cdot\left(e^{\sin(1/n)}-1\right)\cdot\left(e^{\sin(1/n)}+1\right)\right].$$

Giustificare brevemente i passaggi.

**[6 pt]** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = f(5 + 7f(5 + 7x)).$$

Calcolare $h'(x)$.

**[4 pt]** Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue su $[0,1]$ e si supponga che: $f(0) = 2 = g(1)$, $f(1) = 1 = g(0)$. Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente dalle ipotesi?*

- *Esiste* $x$ *in* $[0,1]$ *tale che* $2f(x) + g(x) = \frac{9}{2}$.
- *Esiste* $x$ *in* $[0,1]$ *tale che* $2f(x) - g(x) = 5$.
- *Esiste* $x$ *in* $(0,1)$ *tale che* $f'(x) + g'(x) = 0$.
- $f - g$ *è crescente in* $[0,1]$.

**[6 pt]** Trovare inf e sup dei seguenti insiemi e indicare se si tratti di massimo o minimo.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \\ B &= \left\{ (-1)^n n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \\ C &= \left\{ n^{(-1)^{n+1}} : n \in \mathbb{N} \right\} \\ D &= \left\{ (-1)^{n+1} n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

**Facoltativo.** (Svolgere su un foglio a parte). Trovare i coefficienti del polinomio $P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ in modo che si abbia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$(*) \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = P(n).$$

Mostrare che il polinomio ottenuto verifica effettivamente $(*)$.
**Suggerimento.** Se provo a dimostrare $(*)$ per induzione, trovo che

$$P(n+1) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = P(n) + (n+1)^2,$$

quindi...

(1) $\lim_{x\to 3^-} (x^2-9)\left(e^{\frac{1}{x-3}} + \frac{5}{x-3}\right)$

$= \lim_{x\to 3^-} (x^2-9)\cdot e^{\frac{1}{x-3}} + \lim_{x\to 3^-} 5\cdot\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$

$= 0\cdot e^{-\infty} + 5\cdot 6 = 30$

$\lim_{x\to 3^+} (x^2-9)\cdot\left(e^{\frac{1}{x-3}} + \frac{5}{x-3}\right) = 6\cdot\lim_{x\to 3^+} (x-3)\cdot e^{\frac{1}{x-3}} + 5\cdot 6$

Il limite usciuto è del tipo $0\cdot\infty$:

$(x-3)\cdot e^{\frac{1}{x-3}} = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{\frac{1}{x-3}} = \frac{e^y}{y}$ con $y = \frac{1}{x-3} \xrightarrow[x\to 3^+]{} +\infty$

Quindi $\lim_{x\to 3^+} (x-3)\, e^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$.

Ho che $\lim_{x\to 3^+} (x^2-9)\cdot\left(e^{\frac{1}{x-3}} + \frac{5}{x-3}\right) = +\infty$.

(2) $\frac{2}{(e^n-1)\cdot(e^{1/n}-1)} = \frac{2}{e^n\cdot(1-e^{-n})}\cdot\frac{1/n}{(e^{1/n}-1)}\cdot n$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\cdot n}{e^n}$ (uso $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} = 1$ e $\lim_{n\to\infty}(1-e^{-n}) = 1$)

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (confronto potenze/esponenziali come in (1)).

$3\cdot n\cdot\left(e^{\sin(1/n)}-1\right)\cdot\left(e^{\sin(1/n)}+1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\cdot 2\cdot n\cdot\left(e^{\sin(1/n)}-1\right)$

è del tipo $\infty\cdot 0$

$= 6\cdot\frac{e^{\sin(1/n)}-1}{\sin(1/n)}\cdot\frac{\sin(1/n)}{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 6\cdot 1\cdot 1$ usando $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ e $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Quindi $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{(e^n-1)(e^{1/n}-1)} + 3n\cdot\left(e^{\sin(1/n)}-1\right)\left(e^{\sin(1/n)}+1\right)\right] = 6$

(3) $h(x) = f(5+7\cdot f(5+7x))$

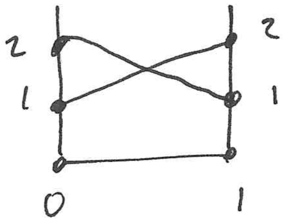
$\Rightarrow h'(x) = f'(5+7f(5+7x))\cdot 7\cdot f'(5+7x)\cdot 7$

$= 49\cdot f'(5+7f(5+7x))\cdot f'(5+7x)$

(4) (i) Sia $h(x) = 2f(x) + g(x)$: $h \in C([0,1], \mathbb{R})$,
$h(0) = 2 \cdot f(0) + g(0) = 4 + 1 = 5$ e $h(1) = 2 \cdot f(1) + g(1) = 4$

Essendo $4 < \frac{9}{2} < 5$, per il Teorema degli Zeri esiste $x \in (0,1)$: $h(x) = \frac{9}{2}$, cioè
$\exists x \in (0,1)$: $2f(x) + g(x) = 9/2$ (V)

(ii) Sia $k(x) = 2f(x) - g(x)$: $k(0) = 3$; $k(1) = 0$: nessuno m'assicura che esiste $x \in (0,1)$ t.c. $k(x) = 5 \notin [0,3]$.

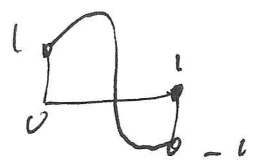



Precisamente, siano
$f(x) = -x + 2$
$g(x) = x + 1$

Le ipotesi sono soddisfatte, ma $2 \cdot f(x) - g(x) = 3 - 3x$, che non vale mai 5 per $0 \leq x \leq 1$. (F)

(iii) Potrei concludere che $\exists x \in (0,1)$: $f'(x) + g'(x) = 0$ se $f$ e $g$ fossero derivabili in $(0,1)$, per il Teorema di Rolle; ma non ho tale ipotesi. (F)

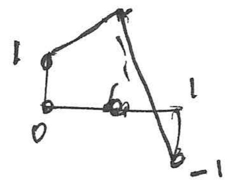
(iv) Sia $p(x) = f(x) - g(x)$: $p(0) = 1 > p(1) = -1$, ma ciò non basta a rendere $p$ decrescente.




P. es. potrei avere $p(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 6(x - \frac{1}{2}) & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$f(x) = -x + 2$ e $g(x) = f(x) - p(x)$.

Poiché $p(0) = 1$, $p(1) = -1$ e $p \in C([0,1], \mathbb{R})$, tutte le ipotesi sono soddisfatte, ma $f - g = p$ non è decrescente in $[0,1]$:




(F)

(5) Ho che $(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

$n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Quindi $n^{(-1)^n} = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è pari} \\ n^{-1} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

$A = \{2k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{2k+1} : k \in \mathbb{N}\}$ e $\frac{1}{2k+1} \searrow 0$ per $k \to \infty$

Ho quindi $\sup A = +\infty$ $\qquad 2k \nearrow +\infty$ per $k \to \infty$

$\inf A = 0 = \min A$.

e A non ha max.

$B = \{2k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{-\frac{1}{2k+1} : k \in \mathbb{N}\}$ e $-\frac{1}{2k+1} \nearrow 0$ per $k \to \infty$

$\inf B = \min B = -1$ e $\sup B = +\infty$

$C = \{(n^{(-1)^n})^{-1} : n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{n^{(-1)^n}} : n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{a_n} : a_n \in A\}$.

$\inf C = 0$ (non è min) e $\sup C = +\infty$

(Anche escludendo il caso $n=0$).

$D = \{-b_n : b_n \in B\} \Rightarrow \inf D = -\sup B = -\infty$ e

$\sup D = -\inf B = 1 = \max D$.

<u>Es. Facoltativo.</u> Supponendo di sapere che $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$, avrei che

$1 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = P(n) + (n+1)^2 = an^3 + bn^2 + cn + d + n^2 + 2n + 1$

$\parallel$

$P(n+1) = a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d = an^3 + (3a+b)n^2 + (3a+2b+c)n + a + b + c + d$

cioè $a = a$

$1 + b = 3a + b$

$2 + c = 3a + 2b + c$

$1 + d = a + b + c + d$

$\leftarrow$ confrontando i coefficienti delle potenze di $n$.

cioè $\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ Allora $a = 1/3$; $b = 1/2$; $c = 1/6$.

Trovo $d$: $1^2 = P(1) = a + b + c + d = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + d$

$\Rightarrow d = 1$

Allora, $P(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ e $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n)$ vale per induzione.